ZADANIA Z PODSTAW KWANTOWEJ TEORII WIELU CIAŁ (DLA DOKTORANTÓW)

Zestaw III - na 14.11.2003

1. Dokończyć Zadanie 1. z poprzedniego zestawu, tj. udowodnić tożsamość

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2+a^2} = \frac{e^{-ar}}{4\pi r},$$

oraz sprowadzić wyrażenie na funkcję korelacji $G(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) = \langle\eta(\mathbf{r}_1)\eta(\mathbf{r}_2)\rangle$ do najprostszej postaci.

2. Korzystając z definicji pochodnej funkcjonalnej

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x_0)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F[f(x)+\epsilon\delta(x-x_0)]-F[f(x)]}{\epsilon},$$

   a) obliczyć pochodne: $\dfrac{\delta f(x)}{\delta f(x_0)}$ oraz $\dfrac{\delta f'(x)}{\delta f(x_0)}$,

   b) udowodnić wzór na "**różniczę zupełną**" funkcjonału dla nieskończenie małej zmiany funkcji $f(x)+\delta f(x)$:

$$F[f+\delta f] = F[f] + \int dx\frac{\delta F}{\delta f(x)}\delta f(x),$$

   c) wyprowadzić **regułę łańcuchową** dla różniczkowania funkcjonalnego

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \int dy\frac{\delta F}{\delta g(y)}\frac{\delta g(y)}{\delta f(x)},$$

   gdzie $F = F[g\circ f]$.

3. Rozważyć warunek konieczny istnienia minimum funkcjonału Ginzburga–Landaua

$$F[\eta] = \int d^3\mathbf{r}\left(\frac{\alpha}{2}\eta^2 + \frac{\beta}{4}\eta^4 - \eta h + C(\nabla\eta)^2\right)$$

i wyprowadzić odpowiednie równanie na parametr porządku $\eta(\mathbf{r})$. Korzystając z tożsamości dowiedzionej w Zadaniu 1. przedyskutować rozwiązania tego równania w przypadku Gaussowskim ($\beta = 0$).