ZADANIA Z METOD STATYSTYCZNYCH
Zestaw VI - na 6.01.2010

Na zajęcia proszę przynieść tablice statystyczne.

1. Zmiena losowa ma rozkład jednorodny na przedziale $[0, \theta]$. Pokaż, że $T(x) = \max x_i$ jest statystyką wystarczającą, oraz że $\hat{\theta} = T(x)$ jest estymatorem największej wiarygodności parametru θ. Znajdź przedział ufności $\gamma \cdot 100\%$ dla tego parametru.

2. W sieci telekomunikacyjnej występuja błędy transmisji. Prawdopodobieństwo przekłamania wysłanego bitu wynosi ϵ. Przyjmujemy, że nadawca wysyła bit 0 (zdarzenie W_0) z prawdopodobieństwem p, lub bit 1 (zdarzenie W_1) z prawdopodobieństwem $1 - p$.
   a) Znajdź prawdopodobieństwo $P(O_0)$ *odbioru* bitu 0.
   b) Znajdź prawdopodobieństwa $P(W_0|O_0)$ (tj. prawdopodobieństwo, że bit 0 został rzeczywiście wysłany, jeśli wiemy, że został odebrany) i $P(W_1|O_1)$ (analogicznie).
   c) Po odbiorze bitu 0, prosimy nadawcę o ponowne przesłanie tego samego (znanego tylko nadawcy) bitu. Znajdź prawdopodobieństwa $P(W_0|O_0O_0)$ oraz $P(W_0|O_0O_1)$.

3. Rzucamy monetą niesymetryczną, dla której prawdopobieństwo otrzymania orła wynosi θ (parametr θ jest nieznany). Jako rozkład zaczątkowy $p(\theta)$ przyjmujemy rozkład jednorodny na przedziale $[0, 1]$. Dalej, niech k będzie liczbą orłów w n rzutach monetą. Znajdź prawdopodobieństwo końcowe $p(\theta|k, n)$.

4. Dane $x_1, \ldots, x_n$ pochodzą z rozkładu $f(x_i|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_i}$ (gdzie $x_i > 0$, λ-nieznane). Znaleźć rozkład końcowy dla λ, jeśli rozkład zaczątkowy to $f(\lambda) = \mu e^{-\mu\lambda}$.

5. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą zmiennymi niezależnymi o rozkładzie Poissona $P(x_i|\theta)$ o nieznanej średniej (i wariancji) θ.
   a) Znajdź najlepszy test hipotezy $H_0 : \theta = 1$ kontra $H_1 : \theta = 1.21$ na poziomie istotnosci α.
   b) Korzystając z centralnego twiedzenia granicznego znajdź przybliżony rozkład Gaussa dla zmiennej losowej $\sum_{i=1}^n x_i$.
   c) Używajac powyższego pokaż, ze minimalna długosci próby n konieczna, aby poziom istotności $\alpha = 0.05$ oraz prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju $\leqslant 0.1$, to około 213.

6. Pokaż, że dla rozkładu $\chi^2_n(u)$: $E(u) = n$, $\text{var}(u) = 2n$.

7. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą zmiennymi niezależnymi o rozkładzie wykładniczym $f(x_i|\theta_1)$, zaś $y_1, \ldots, y_n$ zmiennymi o rozkładzie wykładniczym $f(y_i|\theta_2)$ ($\theta_{1,2}$ są nieznane).
   a) Wylicz stosunek wiarygodnosci dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$ do wiarygodności dla hipotezy konserwatywnej $H_0 : \theta_1 = \theta_2$. Pokaż, że ten stosunek jest funkcją statystyki $T = \left(\frac{1}{2}\sum_i(x_i + y_i)\right)^2 / \left(\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i y_i\right)\right)$.
   b) Korzystając z twierdzenia, że dla dużego n zmienna $t = 2 \ln \mathcal{L}(H_1)/\mathcal{L}(H_0)$ ma rozkład χ^2 skonstruuj test o poziomie istotności α.