

**ZADANIA Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ**  
**Zestaw V - na 25.11.2009**

1. Proszę dokończyć Zadania 1. i 6. z poprzedniego zestawu.
2. Wykaż, że wyrażenie  $\left\lceil \frac{2x+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{2x+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor$  jest zawsze równe albo  $\lfloor x \rfloor$  albo  $\lceil x \rceil$ . W jakich okolicznościach zachodzą poszczególne równości?
3. Znajdź warunek konieczny i wystarczający, aby liczba rzeczywista  $b > 1$  spełniała równość

$$\lfloor \log_b x \rfloor = \lfloor \log_b \lfloor x \rfloor \rfloor$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x \geq 1$ .

4. Dla  $x > 0$ , znajdź sumę wszystkich wielokrotności  $x$  znajdujących się w przedziale domkniętym  $[\alpha \dots \beta]$ .
5. Ile jest liczb postaci  $2^m$ , gdzie  $0 \leq m \leq M$ , które zaczynają się w zapisie dziesiętnym od cyfry 1?
6. Pokaż, że  $n$ -ty wyraz ciągu

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, \dots$$

jest równy  $\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$ . (Jest to jedyny ciąg niemalejący, który zawiera dokładnie  $m$  wystąpień liczby  $m$ .)

7. Czy prawdą jest, że  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$ ?
8. Niech  $\|x\| = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x)$  oznacza odległość dzielącą  $x$  od najbliższej liczby całkowitej. Jak jest wartość sumy

$$\sum_k 2^k \|x/2^k\|^2?$$

(Zauważ, że dla pewnych  $x$  sumowanie może przebiegać od  $-\infty$  do  $+\infty$ .)