ZADANIA Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

Zestaw IV - na 18.11.2009

1. Rozwiąż rekurencję liniową:

$$\begin{cases} h(1) = 1, & h(3n) = 2h(n) + 2, \\ h(2) = -1, & h(3n+1) = 2h(n) + 5, \\ & h(3n+2) = 2h(n) - 7. \end{cases}$$

   Ile wynosi $h(65)$ a ile $h(66)$?

2. Oblicz sumę nieskończoną $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

3. Funkcja zeta Riemanna $\zeta(k)$ jest zdefiniowana jako nieskończona suma

$$\zeta(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots = \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{j^k}.$$

   Oblicz $\sum_{k\geqslant 1} (\zeta(2k) - 1)$.

4. Stos kart układamy w pobliżu krawędzi stołu w taki sposób, aby brzeg górnej karty wystawał jak najdalej poza krawędź stłu, oraz aby wszystkie karty były w równowadze.
   a) Ilu kart trzeba użyć, aby uzyskać nawis o długości 1 karty?
   b) Jaki maksymalny nawis można otrzymać przy użyciu pełnej talii 52 kart?

   Dla ambitnych: Zademonstrować rozwiązania w praktyce!

5. Krasnoludki budują most o rozpiętości 5 piędzi posługując się przy tym kartami o długości 1 piędzi. Ile wynosi minimalna liczba kart potrzebnych do tego, aby po moście mógł przejść krasnoludek o masie równej masie 2 kart?

6. Zadanie 2.36 z podręcznika *Matematyka Konkretna*, dotyczące ciągu S. Golomba.

7. Elementy macierzy kombinatorycznej (a), Vandermonda (b) i Cauchy'ego (c) są zadane następująco

$$\text{(a)}\ \ a_{ij} = y + \delta_{ij}x, \qquad \text{(b)}\ \ a_{ij} = (x_j)^i, \qquad \text{(c)}\ \ a_{ij} = 1/(x_i + y_j).$$

   Pokazać, że ich wyznaczniki są równe, odpowiednio

$$\text{(a)}\ \ x^{n-1}(x+ny), \qquad \text{(b)}\ \ \prod_{1\leqslant j\leqslant n} x_j \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i), \qquad \text{(c)}\ \ \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i + y_j)}.$$

Adam Rycerz