

ZADANIA Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
Zestaw II - na 29.10.2009

1. Z pierwszego rozdziału podręcznika *Matematyka Konkretna*, proszę dokończyć zadania: 1.20, 1.21.
2. Udowodnić tożsamość Lagrange'a:

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2.$$

3. Udowodnić wzór znany od około 1900 lat jako *formuła Nicomacha*:

$$1^3 = 1, \quad 2^3 = 3 + 5, \quad 3^3 = 7 + 9 + 11,$$

$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19, \dots$$

4. Proszę znaleźć i udowodnić prosty wzór opisujący sumę

$$\frac{1^3}{1^4 + 4} - \frac{1^3}{1^4 + 4} + \frac{5^3}{5^4 + 4} - \dots + \frac{(-1)^n (2n + 1)^3}{(2n + 1)^4 + 4}$$

5. Obliczyć sumę $\sum_{k=1}^n k^3$.
6. Pokazać, że $\log_2 x \approx \ln x + \log_{10} x$ z dokładnością lepszą niż 1%.
7. Szef polecił sekretarce wysłać n różnych listów do n adresatów. Sekretarka przygotowała n zaadresowanych kopert, lecz niestety żaden z listów nie trafił do właściwej. Na ile sposobów sekretarka mogła pomieszać listy tak, aby żaden z nich nie trafił do odpowiedniej koperty?

Jeśli listy wkładane są do kopert w sposób losowy, to jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden z nich nie trafi do właściwej koperty przy $n \rightarrow \infty$?

Adam Rycerz