ZADANIA Z KWANTOWEJ TEORII CIAŁA STAŁEGO

Zestaw VIII - na 10 i 17.05.2010

24. Obliczyć wariacyjnie energię wiązania pary Coopera w formaliźmie II kwantowania. W tym celu rozważyć hamiltonian

$$\mathcal{H}_{\text{Cooper}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} c^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}, \tag{14}$$

gdzie potencjał parujący przyjęto w postaci:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V\theta(\hbar\omega_D - |\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F|)\theta(\hbar\omega_D - |\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_F|),$$

($V > 0$, ω_D - częstość Debye'a drgań sieci).

25. Rozważyć *zredukowany Hamiltonian BCS* o postaci identycznej (w II kwantowaniu!) jak $\mathcal{H}_{\text{Cooper}}$ (14).

a) Pokazać, że Hamiltonian BCS komutuje z operatorem całkowitej liczby cząstek $\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}$:

$$\left[\mathcal{H}_{\text{Cooper}}, \hat{N}\right] = 0.$$

Następnie wprowadzić operator unitarny $U = e^{i\phi\hat{N}}$ i wykazać niezmienniczość hamiltonianu BCS względem globalnej transformacji cechowania:

$$\mathcal{H}'_{\text{Cooper}} = U^{\dagger}\mathcal{H}_{\text{Cooper}}U = \mathcal{H}_{\text{Cooper}}. \tag{15}$$

b) Pokazać, że globalna transformacja cechowania (15) jest równoważna transformacji operatorów anihilacji:

$$c'_{\mathbf{k}\sigma} = e^{i\phi} c_{\mathbf{k}\sigma}$$

i odpowiedniej transformacji operatorów kreacji. Jak będą się transformować wartości średnie operatorów zbudowanych z m operatorów kreacji i n operatorów anihilacji

$$\langle \underbrace{c^{\dagger}\dots c^{\dagger}}_{m} \underbrace{c\dots c}_{n} \rangle \ ?$$

26. a) Wyprowadzić średniopolową postać Hamiltonianu BCS:

$$\mathcal{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\Delta_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} c^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} + \Delta^*_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \right) - \frac{|\Delta_{\mathbf{k}}|^2}{V} \right], \tag{16}$$

gdzie

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle = -V \sum_{\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle. \tag{17}$$

Korzystając z wyników poprzedniego zadania pokazać, że Hamiltonian (16) łamie globalną symetrię cechowania (15). Jak będzie się transformować $\Delta_{\mathbf{k}}$?

b) Wykonać transformację Bogoliubova:

$$\begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_{\mathbf{k}} & \sin\vartheta_{\mathbf{k}} \\ -\sin\vartheta_{\mathbf{k}} & \cos\vartheta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \alpha^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix}$$

Hamiltonianu (16) i pokazać, że warunek

$$\alpha_{\mathbf{k}\sigma}\left|\Psi_0\right\rangle = 0 \quad \forall_{\mathbf{k}\sigma},$$

gdzie $|\Psi_0\rangle$ jest stanem podstawowym, prowadzi do równania:

$$\tan 2\vartheta_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}}.$$

c) Następnie zapisać definicję przerwy (17) za pomocą kątów mieszania:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\sin 2\vartheta_{\mathbf{k}}$$

i wyprowadzić równanie samouzgodnione na przerwę:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{E_{\mathbf{k}'}}, \tag{18}$$

gdzie $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\tilde{\epsilon}^2_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}}}$.

d) Rozwiązać równanie (18) dla przypadku Hamiltonianu zredukowanego BCS, tj. dokonać przybliżenia:

$$\sum_{\mathbf{k}} \to \int d\omega \mathcal{N}(\omega) \approx \mathcal{N}(0)\int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\omega.$$

W granicy $V\mathcal{N}(0) \ll 1$ *izotropowa* przerwa energetyczna BCS ma wartość:

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-1/V\mathcal{N}(0)}.$$