ZADANIA Z KWANTOWEJ TEORII CIAŁA STAŁEGO

Zestaw VI - na 18.01.2010

18. *Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa*. Pokazać, że $e^A e^B = e^C$, gdzie

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left([A,[A,B]] - [B,[A,B]]\right) - \frac{1}{24}[A,[B,[A,B]]] + \dots,$$

dla dowolnych operatorów A i B. Dowód przebiega w punktach opisanych poniżej.

a) Pokazać, że dla operatora zależnego od parametru $C(t)$ zachodzi

$$\frac{d}{dt} e^{C(t)} = \int_0^1 d\tau e^{(1-\tau)C(t)} \dot{C}(t) e^{\tau C(t)} = \int_0^1 d\tau e^{\tau C(t)} \dot{C}(t) e^{(1-\tau)C(t)}.$$

b) Definiujemy operator Δ_X, gdzie X jest pewnym operatorem, a działanie Δ_X na operator Y jest dane jako $\Delta_X Y = [X,Y]$. Pokazać, że $e^A B e^{-A} = e^{\Delta_A} B$.

c) Przyjąć, że operator $C(t)$ jest zadany poprzez tożsamość $e^{C(t)} = e^A e^{tB}$. Korzystając z poprzednich punktów, wyprowadzić równanie różniczkowe

$$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}} B = \frac{e^{-\Delta_{C(t)}} \Delta_{C(t)}}{e^{-\Delta_{C(t)}} - 1} B.$$

d) Następnie, dokonać rozwinięcia

$$\dot{C}(t) = \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} (z-1)^n\right] B,$$

gdzie $z = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B}$, i całkować wyraz po wyrazie (aż do trzech komutatorów).

Wyprowadzenie to można znaleźć w *Dodatku D* podręcznika J.M. Normanda *"Rotations in Quantum Mechanics"*.

19. Korzystając ze wzoru Bakera-Campbella-Hausdorffa dokończyć Zadanie 17, tj. pokazać, że uśrednianie operatora energii kinetycznej po stanie próżni fononowej prowadzi do efektywnej całki przeskoku $t_{\text{eff}} = te^{-(\mathcal{M}/\omega)^2}$.