ZADANIA Z KWANTOWEJ TEORII CIAŁA STAŁEGO

Zestaw II - na 9.11.2009

4. Rozważyć jednowymiarowy układ identycznych mas m, połączonych sprężynami o stałej sprężystości k, przy czym każda z mas jest dodatkowo połączona z punktem odpowiadającym jej położeniu równowagi sprężyną o stałej sprężystości k' (rysunek).

   a) Pokazać, że lagrangian układu ma postać:

$$L = \frac{1}{2}\sum_j \left[\dot{\phi}_j^2 - K\Big(\phi_j - \phi_{j-1}\Big)^2 - K'\phi_j^2\right],$$

   gdzie zmienne zredukowane ϕ_j, parametry K, K' oraz czas τ należy wyrazić poprzez parametry fizyczne układu m, k, k'. Wyprowadzić równania ruchu.

   b) Stosując *sieciową transformatę Fouriera*: $\psi_q = N^{-1/2}\sum_j \phi_j \exp(-2\pi i j q/N)$ sprowadzić lagrangian do postaci diagonalnej:

$$L = \frac{1}{2}\sum_q \left[\left|\dot{\psi}_q\right|^2 - \omega_q^2 \left|\psi_q\right|^2\right]. \tag{2}$$

   Podać relację dyspersji $\omega_q \equiv \omega(q)$.

   c) *Kwantowanie kanoniczne w obrazie Heisenberga*. Dla lagrangianu w postaci (2) wprowadzić pędy kanonicznie sprzężone p_q i wypisać Hamiltonian układu w zmiennych p_q, ψ_q. Pokazać, że dla nawiasów Poissona zachodzi: $\{p_q, \psi_r\} = \delta_{qr}$. Następnie zastąpić formalnie w równaniach ruchu nawiasy Poissona komutatorami:

$$\{p_q, \psi_r\} \to \frac{[p_q, \psi_r]}{i\hbar},$$

   i rozwiązać równanie ruchu dla operatora ψ_q w obrazie Heisenberga:

$$\dot{\psi}_q = -\frac{i}{\hbar}\left[H, \psi_q\right].$$

   Wynik: $\psi_q(t) = b_q e^{-i\omega_q t} + b_q^\dagger e^{i\omega_q t}$. Wyrazić operatory p_q, ψ_q oraz Hamiltonian przez operatory $b_q^\dagger$, b_q, i wyprowadzić relacje komutacji dla operatorów $b_q^\dagger$, b_q.

5. Dla układu z Zadania 4 oszacować średni kwadrat amplitudy drgań zerowych $\left\langle \phi_j^2 \right\rangle$ (przeanalizować osobno przypadki $k' = 0$ i $k' \neq 0$).