

ZADANIA Z KWANTOWEJ TEORII CIAŁA STAŁEGO
Zestaw VIII - na 21.05.2007

24. Obliczyć wariacyjnie energię wiązania pary Coopera w formalizmie II kwantowania. W tym celu rozważać hamiltonian

$$\mathcal{H}_{\text{Cooper}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}, \quad (14)$$

gdzie potencjał parujący przyjęto w postaci:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V\theta(\hbar\omega_D - |\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F|)\theta(\hbar\omega_D - |\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_F|),$$

($V > 0$, ω_D - częstość Debye'a drgań sieci).

25. Rozważyć zredukowany Hamiltonian BCS o postaci identycznej (w II kwantowaniu!) jak $\mathcal{H}_{\text{Cooper}}$ (14).

- a) Pokazać, że Hamiltonian BCS komutuje z operatorem całkowitej liczby cząstek $\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma}$:

$$[\mathcal{H}_{\text{Cooper}}, \hat{N}] = 0.$$

Następnie wprowadzić operator unitarny $U = e^{i\phi\hat{N}}$ i wykazać niezmienniczość hamiltonianu BCS względem globalnej transformacji cechowania:

$$\mathcal{H}'_{\text{Cooper}} = U^{\dagger} \mathcal{H}_{\text{Cooper}} U = \mathcal{H}_{\text{Cooper}}. \quad (15)$$

- b) Pokazać, że globalna transformacja cechowania (15) jest równoważna transformacji operatorów anihilacji:

$$c'_{\mathbf{k}\sigma} = e^{i\phi} c_{\mathbf{k}\sigma}$$

i odpowiedniej transformacji operatorów kreacji. Jak będą się transformować wartości średnie operatorów zbudowanych z m operatorów kreacji i n operatorów anihilacji

$$\langle \underbrace{c^{\dagger} \dots c^{\dagger}}_m \underbrace{c \dots c}_n \rangle ?$$

26. a) Wyprowadzić średniopółową postać Hamiltonianu BCS:

$$\mathcal{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\Delta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} + \Delta_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \right) - \frac{|\Delta_{\mathbf{k}}|^2}{V} \right], \quad (16)$$

gdzie

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle = -V \sum_{\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle. \quad (17)$$

Korzystając z wyników poprzedniego zadania pokazać, że Hamiltonian (16) łamie globalną symetrię cechowania (15). Jak będzie się transformować $\Delta_{\mathbf{k}}$?

b) Wykonać transformację Bogoliubova:

$$\begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_{\mathbf{k}} & \sin \vartheta_{\mathbf{k}} \\ -\sin \vartheta_{\mathbf{k}} & \cos \vartheta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \alpha_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$$

Hamiltonianu (16) i pokazać, że warunek

$$\alpha_{\mathbf{k}\sigma} |\Psi_0\rangle = 0 \quad \forall_{\mathbf{k}\sigma},$$

gdzie $|\Psi_0\rangle$ jest stanem podstawowym, prowadzi do równania:

$$\tan 2\vartheta_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}}.$$

c) Następnie zapisać definicję przerwy (17) za pomocą kątów mieszania:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sin 2\vartheta_{\mathbf{k}}$$

i wyprowadzić równanie samouzgodnione na przerwę:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{E_{\mathbf{k}'}} \quad (18)$$

gdzie $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}$.

d) Rozwiązać równanie (18) dla przypadku Hamiltonianu zredukowanego BCS, tj. dokonać przybliżenia:

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d\omega \mathcal{N}(\omega) \approx \mathcal{N}(0) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\omega.$$

W granicy $V\mathcal{N}(0) \ll 1$ izotropowa przerwa energetyczna BCS ma wartość:

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-1/V\mathcal{N}(0)}.$$