

ZADANIA Z KWANTOWEJ TEORII CIAŁA STAŁEGO
Zestaw IV - na 8 i 15.01.2007

11. Pokazać bezpośrednim rachunkiem, że operatory spinowe w reprezentacji Holsteina-Primakoffa:

$$S_i^+ = (2S - a_i^\dagger a_i)^{1/2} a_i, \quad S_i^- = (S_i^+)^{\dagger}, \quad S_i^z = S - a_i^\dagger a_i \quad (5)$$

spełniają kanoniczne relacje komutacji:

$$[S_i^z, S_i^\pm] = \pm S_i^\pm, \quad [S_i^+, S_i^-] = 2S_i^z.$$

O operatorach a_i, a_i^\dagger zakładamy, że spełniają bozonowe relacje komutacji:

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}.$$

12. Rozważyć Hamiltonian Heisenberga:

$$H = J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (6)$$

dla sieci trójwymiarowej w przypadku ferromagnetycznym $J < 0$.

- a) Sprowadzić Hamiltonian (6) do postaci diagonalnej:

$$H = -|J|zS^2N + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad (7)$$

gdzie N jest liczbą węzłów sieci, z -liczbą koordynacyjną (liczbą najbliższych sąsiadów), zaś enegią wzbudzeń magnonowych.

- b) Obliczyć wielką funkcję rozdziału Z_G i potencjał termodynamiczny Ω dla Hamiltonianu (7).
c) Poprzez różniczkowanie potencjału Ω obliczyć średnią liczbę magnonów w danym stanie pędowym \mathbf{k} : $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$, oraz, korzystając z unitarności sieciowej transformaty Fouriera, średnią magnetyzację na węzeł $\langle S_i^z \rangle$.

Wskazówka: Wyliczając całkę po energiach dokonać takiej zamiany zmiennych, aby było możliwe zastosowanie wzoru:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} = \Gamma(n)\zeta(n).$$

- d) Obliczyć energię wewnętrzną U , entropię S i ciepło właściwe c_V pochodzące od magnonów.

13. Pokazać, że transformacja Bogoliubowa:

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta_{\mathbf{k}} & \sinh \theta_{\mathbf{k}} \\ \sinh \theta_{\mathbf{k}} & \cosh \theta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}} \\ \beta_{\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (8)$$

zachowuje relacje komutacji dla operatorów bozonowych $a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}$, o ile operatory $\alpha_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}$ je spełniają. Jak będzie wyglądać analogiczna transformacja dla operatorów fermionowych? Zastanowić się również, jakie znaczenie *fizyczne* ma fakt, że $\det B = 1$, gdzie B jest macierzą definiującą transformację Bogoliubowa (26b).

14. Rozważyć Hamiltonian Heisenberga (6) dla sieci trójwymiarowej w przypadku antyferromagnetycznym $J > 0$.

a) Transformację Holsteina-Primakoffa (5) należy zdefiniować oddzielnie dla poszczególnych podsieci ($i \in A, j \in B$), w przybliżeniu harmonicznym:

$$\begin{cases} S_i^+ = \sqrt{2S}a_i \\ S_i^- = \sqrt{2S}a_i^\dagger \\ S_i^z = S - a_i^+a_i \end{cases} \text{ dla } i \in A, \quad \begin{cases} S_j^+ = \sqrt{2S}b_j^\dagger \\ S_j^- = \sqrt{2S}b_j \\ S_j^z = -S + b_i^+b_j \end{cases} \text{ dla } j \in B; \quad (9)$$

co sprowadza Hamiltonian (6) do postaci:

$$H = 2JS \sum_{\langle ij \rangle} \left(a_i^\dagger a_i + b_j^\dagger b_j + a_i b_j + b_j^\dagger a_i^\dagger \right) - JzS^2N. \quad (10)$$

b) Następnie zdiagonalizować Hamiltonian (10) przy pomocy sieciowej transformaty Fouriera (niezależnie dla każdej podsieci) i transformacji Bogoliubowa (26b), tj. zapisać go w postaci:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(E_{\mathbf{k}\alpha} \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}\beta} \beta_{\mathbf{k}}^\dagger \beta_{\mathbf{k}} \right) - JzS^2N + E_0. \quad (11)$$

Wielkości $E_{\mathbf{k}\alpha}, E_{\mathbf{k}\beta}, E_0$ należy jawnie wyliczyć.

c) Znając postać diagonalną Hamiltonianu (11) obliczyć energię wewnętrzną $U(T)$, ciepło właściwe c_V oraz średnią liczbę magnonów na węzeł $\langle n_i \rangle$.