

ZADANIA Z KWANTOWEJ TEORII CIAŁA STAŁEGO
Zestaw II - na 27.11.2006

4. Rozważyć jednowymiarowy układ identycznych mas m , połączonych sprężynami o stałej sprężystości k , przy czym każda z mas jest dodatkowo połączona z punktem odpowiadającym jej położeniu równowagi sprężyną o stałej sprężystości k' (rysunek).



- a) Pokazać, że lagrangian układu ma postać:

$$L = \frac{1}{2} \sum_j \left[\dot{\phi}_j^2 - K(\phi_j - \phi_{j-1})^2 - K'\phi_j^2 \right],$$

gdzie zmienne zredukowane ϕ_j , parametry K , K' oraz czas τ należy wyrazić poprzez parametry fizyczne układu m , k , k' . Wyprowadzić równania ruchu.

- b) Stosując *sieciową transformatę Fouriera*: $\psi_q = N^{-1/2} \sum_j \phi_j \exp(-2\pi i j q / N)$ sprowadzić lagrangian do postaci diagonalnej:

$$L = \frac{1}{2} \sum_q \left[|\dot{\psi}_q|^2 - \omega_q^2 |\psi_q|^2 \right]. \quad (2)$$

Podać relację dyspersji $\omega_q \equiv \omega(q)$.

- c) *Kwantowanie kanoniczne w obrazie Heisenberga*. Dla lagrangianu w postaci (2) wprowadzić pędy kanonicznie sprzężone p_q i wypisać Hamiltonian układu w zmiennych p_q , ψ_q . Pokazać, że dla nawiasów Poissona zachodzi: $\{p_q, \psi_r\} = \delta_{qr}$. Następnie zastąpić formalnie w równaniach ruchu nawiasy Poissona komutatorami:

$$\{p_q, \psi_r\} \rightarrow \frac{[p_q, \psi_r]}{i\hbar},$$

i rozwiązać równanie ruchu dla operatora ψ_q w obrazie Heisenberga:

$$\dot{\psi}_q = -\frac{i}{\hbar} [H, \psi_q].$$

Wynik: $\psi_q(t) = b_q e^{-i\omega_q t} + b_q^\dagger e^{i\omega_q t}$. Wyrazić operatory p_q , ψ_q oraz Hamiltonian przez operatory b_q^\dagger , b_q , i wyprowadzić relacje komutacji dla operatorów b_q^\dagger , b_q .

5. Dla układu z Zadania 4 oszacować średni kwadrat amplitudy drgań zerowych $\langle \phi_j^2 \rangle$ (przeanalizować osobno przypadki $k' = 0$ i $k' \neq 0$).