ZADANIA Z ALGEBRY (KURS B)

Zestaw VI - na 25.05.2005

1. Znaleźć wartości własne i wektory własne następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Zdiagonalizować macierze z poprzedniego zadania, tj. dla danej macierzy A znaleźć macierz S taką, że macierz $B = S^{-1}AS$ jest diagonalna.

3. Omówić ogólne zagadnienie sprowadzania macierzy o znanych wartościach własnych i wektorach własnych do postaci diagonalnej.

4. W przestrzeni wielomianów stopnia $\leqslant 2$ wprowadzono bazę:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2,$$

oraz iloczyn skalarny

$$(u, v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx.$$

a) Obliczyć tensor metryczny $g_{ij} = (e_i, e_j)$.

b) Znaleźć wielomiany f_1, f_2, f_3 postaci

$$\begin{aligned} f_1 &= A_{11}e_1, \\ f_2 &= A_{21}e_1 + A_{22}e_2, \\ f_3 &= A_{31}e_1 + A_{32}e_2 + A_{33}e_3, \end{aligned}$$

tworzące bazę ortogonalną, tzn. $h_{ij} = (f_i, f_j) = \delta_{ij}$. Wypisać macierz A.

c) Powtórzyć rachunek dla $e_1 = 1 + x$, $e_2 = 1 - x$, $e_3 = x^2$.