ZADANIA Z ALGEBRY (KURS B)

Zestaw V - na 11 i 18.05.2005

Na najbliższych ćwiczeniach odbędzie się krótkie (około 30 minut) kolokwium z zagadnień rachunku macierzowego i układów równań liniowych. Proszę powtórzyć metody obliczania wyznaczników i rzędu macierzy, wzory Cramera i twierdzenie Kroneckera–Cappellego.

1. Mostowski i Stark, rozdział V §3.1, zad. 1 i 2 oraz §3.2, zad. 1 i 2. Proszę także wymyślić po 2 przykłady układów jednorodnych z $m < n$ i $m > n$.

2. Podać warunki rozwiązywalności układu równań:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = c,$$

   gdzie $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ oraz $\mathbf{x}$ są wektorami w przestrzeni trójwymiarowej zaś c parametrem rzeczywistym. Podać interpretację geometryczną zadania.

3. Macierz *kombinatoryczna* (a_{ij}), *Vandermonda* (b_{ij}) i *Cauchy'ego* (c_{ij}) są zdefiniowane następująco: $a_{ij} = x\delta_{ij} + y$, $b_{ij} = x_j^i$ (x_j *do potęgi* i–tej), oraz $c_{ij} = 1/(x_i + y_j)$.

   a) Pokazać, że wyznaczniki tych macierzy wynoszą, odpowiednio:

$$x^{n-1}(x+ny), \quad \prod_{1\leqslant j\leqslant n} x_j \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i), \quad \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)/\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i+x_j).$$

   b) Pokazać, że macierz odwrotna do macierzy kombinatorycznej dana jest wzorem: $(a^{-1})_{ij} = (\delta_{ij}(x+ny) - y)/x(x+ny)$.

   c) Pokazać, że jeśli w macierzy Vandermonda za x_j podstawimy j–ty pierwiastek zespolony z 1, to otrzymamy macierz proporcjonalną do unitarnej.

4. Udowodnić, że wyznacznik macierzy cyklicznej

$$\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} = \varphi(\epsilon_1)\varphi(\epsilon_2)\ldots\varphi(\epsilon_n),$$

   gdzie $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}$, zaś $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ są kolejnymi pierwiastkami n–tego stopnia z 1. *Wskazówka:* pomnożyć macierz cykliczną przez macierz Vandermonda, rozważaną w poprzednim zadaniu, i skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego.

5. Korzystając z wyniku i rachunków pośrednich w poprzednim zadaniu, znaleźć wektory własne i wartości własne: (a) macierzy cyklicznej, w której $a_0 = \alpha$, $a_1 = a_{n-1} = \beta$, zaś $a_2 = \ldots = a_{n-2} = 0$, oraz (b) macierzy kombinatorycznej.

6. Znaleźć wektory własne i wartości własne ogólnej macierzy cyklicznej. Jaki warunek muszą spełniać współczynniki $a_0 \ldots a_{n-1}$ aby wartości własne macierzy cyklicznej były rzeczywiste? Pokazać, że wszystkie, z wyjątkiem co najwyżej dwóch, wartości własne są wówczas podwójnie zdegenerowane i wykorzystać ten fakt do przedstawienia wektorów własnych w reprezentacji rzeczywistej.