ZADANIA Z ALGEBRY (KURS B)

Zestaw III - na 20 i 27.04.2005

1. Obliczyć:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

   oraz wyznacznik, który powstaje z ostatniego poprzez wstawienie liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ w miejsce i–tej kolumny.

2. Obliczyć:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix},$$

3. Obliczyć k–tą potęgę następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Znaleźć rzędy następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

6. Pokazać, że pomnożenie wektora kolumnowego przez macierz ortogonalną nie zmienia sumy kwadratów współrzędnych. Jaka jest interpretacja geometryczna takiego przekształcenia?

7. Pokazać, że $\det(1+AB) = \det(1+BA)$ dla dowolnych macierzy prostokątnych takich, że iloczyny AB, BA są macierzami kwadratowymi.