

ZADANIA Z ALGEBRY (KURS B)
Zestaw I - na 2 i 9.03.2005

1. Udowodnić indukcyjnie, że dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq 1$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Następnie, przyjmując $z = e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, zapisać osobno część rzeczywistą i urojoną powyższej równości. Prawe strony otrzymanych wzorów sprowadzić do najprostszej postaci.

2. Korzystając z własności liczb zespolonych wyrazić $\cos 3\phi$ za pomocą $\cos \phi$, oraz $\sin 3\phi$ za pomocą $\sin \phi$.
3. Ciąg Fibonacciego definiujemy następująco:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1};$$

zatem pierwsze wyrazy ciągu to: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Udowodnij indukcyjnie, że:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

4. Zadania z podręcznika Mostowskiego i Starka: Rozdział III, §4.2, zad. 2, 3, 5, 8; oraz §4.3, zad. 1, 4, 7.
5. Ze zbioru zadań Jeśmianowicza i Łosia: 1.23.1, 1.23.2, 1.23.4; a także: 2.11.2, 2.11.4, 2.11.6, 2.12.1, 2.12.2, 2.12.3, 2.13.9.