Funkcja φ

Z Wikipedii, wolnej encyklopedii

Funkcja *φ* (Eulera) lub **tocjent** – funkcja nosząca nazwisko Eulera przypisująca każdej liczbie naturalnej liczbę liczb względnie z nią pierwszych nie większych od niej samej.

Funkcja Eulera odgrywa dużą rolę w teorii liczb. Ma też istotne zastosowania w kryptografii w badaniach nad złożonością szyfrów.

Funkcja φ Eulera dana jest dla każdej liczby naturalnej n wzorem

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p1}\right)\left(1-\frac{1}{p2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right),$$

gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k$ są wszystkimi czynnikami pierwszymi liczby n liczonymi bez powtórzeń.

Własności

- Jeżeli p jest pierwsza, to każda z liczb $1, 2, \dots, p-1$ jest względnie pierwsza z p, więc:
  $\varphi(p) = p - 1$
- Jeżeli liczby całkowite m,n są względnie pierwsze, to
  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$
- Jeżeli $n = p^k$, to
  $\varphi(n) = p^k - p^{k-1}$
- Jeżeli n nie ma wielokrotnych dzielników pierwszych, tj.
  $$n = p_1 p_2 \dots p_k$$
  gdzie liczby p_i są pierwsze i parami różne ($i = 1, \dots, k$), to
  $$\varphi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\dots(p_k - 1)$$
- Dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi:

$$\sum_{m \mid n} \varphi(m) = n,$$

(sumowanie przebiega wszystkie dzielniki liczby n).

- Jeżeli
  $$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{k_i}$$

jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze to

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(p_i^{k_i})$$

Przykład

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Zobacz też

- chińskie twierdzenie o resztach
- małe twierdzenie Fermata
- RSA
- funkcja Carmichaëla
- funkcja π

Źródło „http://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Funkcja_%CF%86&oldid=28465110”
Kategoria: Teoria liczb