

## ZADANIA Z JĘZYKA C DLA GRUP 2., 7. I 9.

### Zestaw V - styczeń 2023

15. **Obliczanie liczby  $e$  metodą Monte Carlo.** Podobnie jak w Zadaniu 10., w którym obliczaliśmy liczbę  $\pi$  generując długi ciąg par liczb pseudolosowych  $(x, y)$  i korzystając z faktu, że — dla liczb o rozkładzie równomiernym ( $0 \leq x < 1$ ,  $0 \leq y < 1$ ) — prawdopodobieństwo trafienia w koło o promieniu 1 wynosi  $\pi/4$ , możliwe jest skonstruowanie innego *procesu pseudolosowego*, w którym prawdopodobieństwo sukcesu powiązane będzie z podstawą logarytmów naturalnych, tzw. liczbą Eulera (lub Nepera),  $e \approx 2.718281828459$ .

Okazuje się, że dla losowej permutacji zbioru  $n$  elementów (dla ustalenia uwagi: np. *liczb naturalnych*  $0, 1, 2, \dots, n-1$ ) prawdopodobieństwo, że **żaden element nie pozostanie na swoim miejscu** wynosi

$$P_0(n) = 1 - 1 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!},$$

co jest numerycznie bliskie  $1/e \approx 0.36788$  dla dużych  $n$ . (Przykładowo, dla  $n = 100$  zgadzać się będzie pierwsze 159 cyfr po przecinku.) Dowód powyższego wzoru można znaleźć np. w podręczniku W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, rozdz. 1.13, lub Graham, Knuth, Patashnik, *Matematyka konkretna*, rozdz. 5.3.

Tym razem, **zadanie polega na** napisaniu programu, który generuje ciąg przypadkowych permutacji liczb  $0, 1, 2, \dots, n-1$ , dla każdej permutacji określa liczbę punktów stałych  $k$ , oraz wylicza, ile razy w ciągu  $N$  permutacji mamy  $k = 0$ . Ułamek  $N/N_{k=0}$  stanowi oszacowanie liczby  $e$ .

Technicznie, generowanie można zacząć od permutacji identycznościowej, którą w pamięci komputera reprezentować będzie tablica *zadeklarowana* następująco:

```
#define n 100
int perm[n];
```

a następnie zainicjowana wartościami:

```
for (j=0; j<n; j++)
    perm[j]=j;
```

Dla takiej permutacji liczba punktów stałych: **k==n**. Można powiedzieć, że nasze działania będą teraz odwrotne do wykonywanych w algorytmie sortowania bąbelkowego (zob. *wyklad04*), chcemy bowiem w naszej początkowo uporządkowanej tablicy wprowadzić *maksymalny bałagan*. Taki cel można osiągnąć, wykonując dużą liczbę następujących kroków:

- a) Losujemy całkowite  $j$  z przedziału  $0, 1, \dots, n-2$ .

- b) Zamieniamy elementy `perm[j]` oraz `perm[j+1]`.  
 c) Określamy nową liczbę punktów stałych wg przepisu:

$$\begin{aligned} k += & (\text{perm}[j]==j) + (\text{perm}[j+1]==j+1) \\ & - (\text{perm}[j]==j+1) - (\text{perm}[j+1]==j); \end{aligned}$$

Kroki (a)–(b) powtarzamy np.  $N = 10^6$  razy zliczając, ile razy wystąpi  $k==0$ .

Jak widać, przestawiamy zawsze najbliższych sąsiadów, a zatem określenie nowego  $k$  wymaga obliczania wyrażeń odwołujących się wyłącznie do dwóch zamienionych elementów; dzięki temu algorytm jest szybki. Pewna wada przedstwowego podejścia wiąże się z faktem, że kolejne permutacje są do siebie bardzo podobne, potrzeba wielu powtórzeń kroków (a)–(b) aby charaterystyki takie jak  $k$  można było uznać za statystycznie niezależne. W szczególności, pewna liczba permutacji wygenerowanych jako pierwsze będzie *obciążona* elementami permutacji identycznościowej. Zasadniczo, te początkowe permutacje należy pominąć w obliczeniach, aby oszacowanie liczby  $e$  było *nieobciążone* wyborem permutacji początkowej.

W naszym przypadku, możemy przyjąć, że po pierwszym wystąpieniu  $k==0$  wszelkie ślady po permutacji identycznościowej uległy zatarciu. Jako *lepsze oszacowanie liczby  $e$*  przyjmujemy zatem ułamek  $\tilde{N}/\tilde{N}_{k=0}$ , w którym licznik i mianownik oznaczają, odpowiednio: liczbę wszystkich permutacji, oraz l. permutacji bez punktów stałych, liczone *po* pierwszym wystąpieniu  $k==0$ .

Proszę sporządzić wykresy pokazujące, jak zmienia się  $N/N_{k=0}$  oraz  $\tilde{N}/\tilde{N}_{k=0}$  w zależności całkowitej liczby iteracji  $N$ .

Aby oszacować niepewność statystyczną naszego przybliżenie liczby  $e$ , całą symulację (dla wybranego  $N$ ) można powtórzyć 20 – 30 razy (startując z różnymi podstawami generatora liczb pseudolosowych), a następnie dla serii wyników  $\tilde{N}/\tilde{N}_{k=0}$  obliczyć średnią i odchylenie standardowe.