## ELEKTRONY DIRACA W NANOSTRUKTURACH GRAFENOWYCH

ROZPRAWA HABILITACYJNA przedłożona Radzie Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego

**Adam Rycerz** 

Uniwersytet Jagielloński Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego Zakład Teorii Materii Skondensowanej i Nanofizyki

Kraków, październik 2009

## **SPIS RZECZY**

Podziękowania Publikacje stanowiące rozprawę habilitacyjną ŻYCIORYS			iii iv v				
				PF	PEŁNA LISTA PUBLIKACJI vii		
					А. В.	Artykuły w recenzowanych czasopismach międzynarodowych i cytowania Publikacje w wydawnictwach książkowych	vii x
I.	OPIS ROZPRAWY HABILITACYJNEJ		xi				
	A.	Wprowadzenie: Grafen jako dwuwymiarowy gaz bezmasowych elektronów relatywistycznych	xi				
	B.	Nowa koncepcja elektroniki kwantowej	xiii				
	C. D.	Chaos kwantowy w grafenie	xv xvii				
П.	. PRACE BADAWCZE NIEZWIĄZANE Z ROZPRAWĄ HABILITACYJNĄ		XX				
	A.	Krótkie omówienie rozprawy doktorskiej	XX				
	В. С.	Lokalizacja Motta i przewodność układów nanoskopowych (2003–2005) Stany splątane w układach skorelowanych (2006–2007)	xxi xxii				
III	.POI	DSUMOWANIE	xxiii				
LI	TER	ATURA CYTOWANA	xxiv				
K	OPIE	PRAC STANOWIĄCYCH ROZPRAWĘ HABILITACYJNĄ x	xviii				

### Podziękowania

Serdecznie dziekuje profesorowi Józefowi Spałkowi za wieloletnia współprace naukowa a także pomoc w aplikacjach o stypendia zagraniczne, w okresie których powstała większość spośród prac stanowiących przedłożoną rozprawę. Były to: Stypendium Zagraniczne Fundacji na rzecz Nauki Polskiej (obecnie program "Kolumb"), w ramach którego przebywałem w okresie od września 2005 do sierpnia 2006 na Uniwersytecie w Lejdzie (Holandia), oraz Stypendium im. Aleksandra von Humboldta w okresie od października 2007 do września 2009 na Uniwersytecie w Ratyzbonie (Niemcy). W okresie pobytu w Lejdzie i po jego zakończeniu współpracowałem z Prof. C.W.J. Beenakkerem, dr hab. Jakubem Tworzydło (Uniwersytet Warszawski), a także Prof. Björnem Trauzettelem i Dr. Patrikiem Recherem (obecnie Uniwersytet w Würzburgu), oraz Antonem Akhmerovem i Jensem Bardarsonem, którym serdecznie dziękuję. Za wspólną pracę w okresie pobytu w Ratyzbonie dziękuję Prof. Klausowi Richterowi, Prof. İnançowi Adagidelemu (obecnie Uniwersetet w Stambule), Dr. Michaelowi Wimmerowi (Uniwersytet w Lejdzie) oraz Jürgenowi Wurmowi. Oprócz wsparcia ze strony wymienionych wyżej fundacji, prace badawcze przedstawione w rozprawie były także częściowo finansowane ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego (w ramach grantów Nr 1-P03B-001-29 i N-N202-128736).

### Publikacje stanowiące rozprawę habilitacyjną

- 1. A. Rycerz, J. Tworzydło, and C.W.J. Beenakker, *Valley filter and valley valve in graphene*, Nature Physics **3**, 172–175 (2007).
- 2. A.R. Akhmerov, J.H. Bardarson, A. Rycerz, and C.W.J. Beenakker, *Theory of the valley-valve effect in graphene nanoribbons*, Phys. Rev. B **77**, 205416 (2008) pp. 1–5.
- 3. A. Rycerz, *Nonequilibrium valley polarization in graphene nanoconstrictions*, phys. stat. sol. (a) **205**, 1281–1289 (2008).
- P. Recher, B. Trauzettel, A. Rycerz, Ya.M. Blanter, C.W.J. Beenakker, and A.F. Morpurgo, *Aharonov-Bohm effect and broken valley-degeneracy in graphene rings*, Phys. Rev. B 76, 235404 (2007) pp. 1–6.
- 5. A. Rycerz, *Aharonov-Bohm Effect and Valley Polarization in Nanoscopic Graphene Rings*, Acta Phys. Polon. A **115**, 322–325 (2009).
- 6. A. Rycerz, J. Tworzydło, and C.W.J. Beenakker, *Anomalously large conductance fluctuations in weakly disordered graphene*, Europhys. Lett. **79**, 57003 (2007) pp. 1–5.
- J. Wurm, A. Rycerz, I. Adagideli, M. Wimmer, K. Richter, and H.U. Baranger, Symmetry Classes in Graphene Quantum Dots: Universal Spectral Statistics, Weak Localization, and Conductance Fluctuations, Phys. Rev. Lett. 102, 056806 (2009) pp. 1–4.
- 8. A. Rycerz, P. Recher, and M. Wimmer, *Conformal mapping and shot noise in graphene*, Phys. Rev. B **80**, 125417 (2009) pp. 1–14.
- 9. A. Rycerz, *Magnetoconductance of the Corbino disk in graphene*, arXiv:0909. 3018, przesłane do Phys. Rev. B.

## ŻYCIORYS

Adam Paweł Rycerz, urodzony w Krakowie, 30 kwietnia 1977. Żona Katarzyna, synowie Paweł (ur. 2005) i Piotr (ur. 2007).

#### Wykształcenie:

- Studia Matematyczno–Przyrodnicze na Wydziale Matematyki i Fizyki UJ (1996–2000), praca magisterska obroniona z wyróżnieniem 16 czerwca 2000.
- Doktorat z nauk fizycznych, obroniony z wyróżnieniem 25 czerwca 2003 na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki UJ.

#### Przebieg pracy zawodowej:

- Studia doktoranckie w Instytucie Fizyki UJ (2000–2003).
- Praca na stanowisku asystenta w IF UJ (od 2003–2006).
- Zatrudnienie na stanowisku adiunkta w IF UJ (od 2006)

#### Dłuższe staże naukowe w ośrodkach zagranicznych:

- Program TEMPUS, University–College Cork, Irlandia, październik–grudzień 2000.
- Stypendium Zagraniczne FNP dla Młodych Doktorów, Uniwersytet w Lejdzie, Holandia, wrzesień 2005 – sierpień 2006.
- Stypendium Fundacji im. Aleksandra von Humboldta, Uniwersytet w Ratyzbonie, Niemcy, październik 2007 wrzesień 2009.

#### Ważniejsze nagrody i wyróżnienia krajowe:

- Nagroda Polskiego Towarzystwa Fizycznego za pracę magisterską, III stopnia (2000).
- Stypendium Fundacji na rzecz Nauki Polskiej dla Młodych Naukowców (2003 i 2004).
- Nagroda zespołowa Rektora Politechniki Krakowskiej, II stopnia (2004).
- Nagroda Ministra Edukacji Narodowej i Sportu za pracę doktorską, I stopnia (2004).
- Nagroda indywidualna Rektora Uniwersytetu Jagiellońskiego, II stopnia (2008).

#### Referaty na konferencjach i szkołach międzynarodowych:

- VI Training Course in the Physics of Correlated Electron Systems and High–T<sub>c</sub> Superconductors, Vietri sul Mare (Salerno), Włochy, 8–19 października 2001.
- VIII Dutch-Polish Colloquium on Condensed Matter Physics: New Materials and Novel Phases, Duszniki Zdrój, 7–10 lutego 2002.

- VII Training Course in the Physics of Correlated Electron Systems and High–T<sub>c</sub> Superconductors, Vietri sul Mare (Salerno), Włochy, 14–25 października 2002.
- VIII Training Course in the Physics of Correlated Electron Systems and High–T<sub>c</sub> Superconductors, Vietri sul Mare (Salerno), Włochy, 6–17 października 2002.
- The European Conference: Physics of Magnetism PM'05, Poznań, 24–27 czerwca 2005.
- TNT'07 Trends in Nanotechnology, San Sebastian, Hiszpania, 3–7 września 2007.
- The European Conference: Physics of Magnetism PM'08, Poznań, 24-27 czerwca 2008.
- DPG Spring Meeting 2009, Drezno, Niemcy, 22–27 marca 2009.

#### Pozostałe wystąpienia na konferencjach międzynarodowych:

- NATO Advanced Research Workshop: Open Problems in Strongly Correlated Electron Systems, Bled, Słowenia, maj 2000.
- 6th Patras University Euroconference on Properties of Condensed Matter Probed with X-Ray Scattering: Electron Correlations and Magnetism, Patras, Grecja, 21–25 września 2001.
- International Conference on Strongly Correlated Electron Systems SCES'02, Kraków, 10–13 lipca 2002.
- NATO ARW: Concepts in Electron Correlations, Hvar, Chorwacja, wrzesień 2003.
- International Conference on Strongly Correlated Electron Systems SCES'04, Karlsruhe, Niemcy, 26–30 lipca 2004.
- TNT'04 Trends in Nanotechnology, Segovia, Hiszpania, 13–17 września 2004.
- International Conference on Strongly Correlated Electron Systems SCES'05, Wiedeń, Austria, 26–30 lipca 2005.
- International Conference: Nanoelectronics 2006, Lancaster, UK, 8–11 stycznia 2006.
- International Conference on Strongly Correlated Electron Systems SCES'07, Houston, USA, 13–18 maja 2007.
- Graphene Week 2008, Triest, Włochy, 25–29 sierpnia 2008.
- TNT'08 Trends in Nanotechnology, Oviedo, Hiszpania, 1-5 września 2008.

## PEŁNA LISTA PUBLIKACJI

# A. Artykuły w recenzowanych czasopismach międzynarodowych i cytowania

Liczbę cytowań każdego z artykułów podano w formacie x(y), gdzie x jest całkowitą liczbą cytowań, zaś y-liczbą cytowań po odjęciu własnych.

- J. Spałek, R. Podsiadły, W. Wójcik, A. Rycerz, *Optimization of single-particle basis for exactly soluble models of correlated electrons*, Phys. Rev. B 61, 15676–87 (2000).
   ⇒ L. cytowań: 23 (7)
- J. Spałek, R. Podsiadły, A. Rycerz, W. Wójcik, *Exact Diagonalization of Many–Fermion Hamiltonian Combined with Wave-Function Readjustment: Application to One–Dimensional Systems*, Acta Phys. Polon. B **31**, 2879–98 (2000).
   ⇒ L. cytowań: 11 (1)
- 3. A. Rycerz, J. Spałek, *Exact Diagonalization of Many–Fermion Hamiltonian with Wave–Function Renormalization*, Phys. Rev. B 63, 073101 (2001) pp. 1–4.
   ⇒ L. cytowań: 16 (2)
- 4. J. Spałek, A. Rycerz, Electron localization in one-dimensional nanoscopic system: A combined exact diagonalization an ab initio approach, Phys. Rev. B 64, 161105(R) (2001) pp. 1–4.
  ⇒ L. cytowań: 14 (4)
- 5. J. Spałek, A. Rycerz, W. Wójcik, Exact Diagonalization of Many-Fermion Hamiltonian Combined with Wave–Function Readjustment II. Metallicity and Electron Localization in Nanoscopic Systems, Acta Phys. Polon. B 32, 3189–3202 (2001).
  ⇒ L. cytowań: 11 (1)
- 6. A. Rycerz, J. Spałek, *Electronic states, Mott localization, electron–lattice coupling, and dimerization for correlated one–dimensional systems*, Phys. Rev. B 65, 035110 (2002) pp. 1–15.
  ⇒ L. cytowań: 12 (2)
- 7. J. Spałek, A. Rycerz, R. Podsiadły, *Electron localization from the combined exact diagonalization ab initio approach*, Physica B **312–313**, 542–544 (2002).
  ⇒ L. cytowań: 0
- 8. A. Rycerz, J. Spałek, R. Podsiadły, *Electron localization from the combined exact diagonalization ab initio approach in one dimension*, Physica B **318**, 338–340 (2002).
  ⇒ L. cytowań: 0
- 9. A. Rycerz, J. Spałek, R. Podsiadły, *Defining metallicity and Mott localization in correlated nanoscopic systems*, Acta Phys. Polon. B 34, 651–654 (2003).
  ⇒ L. cytowań: 2 (0)

- 10. A. Rycerz, J. Spałek, On metal-insulator transition for a one-dimensional correlated nanoscopic chain, Acta Phys. Polon. B 34, 655–658 (2003).
   ⇒ L. cytowań: 2 (0)
- 11. A. Rycerz, J. Spałek, Microwave absorption by the Josephson network in a low field: Application to ceramic high temperature superconductors, Physica C 387, 97–101 (2003).
  ⇒ L. cytowań: 3 (2)
- 12. A. Rycerz, J. Spałek, Fundamental properties, localization threshold, and Tomonaga– Luttinger behavior of electrons in nanochains, Eur. Phys. J. B 40, 153–165 (2004).
   ⇒ L. cytowań: 9 (3)
- 13. E.M. Görlich, A. Rycerz, J. Spałek, *Electronic properties of correlated nanoscopic systems from the exact diagonalization combined with an ab initio approach*, phys. stat. sol. (b), **242**, 234–244 (2005).
  ⇒ L. cytowań: 2 (1)
- 14. A. Rycerz, J. Spałek, Fundamental properties of correlated electrons in nanochains, Physica B 359–361, 1448–1450 (2005).
  ⇒ L. cytowań: 0
- 15. A. Rycerz, J. Spałek, *Electronic structure and parity effects in correlated nanosystems*, phys. stat. sol. (b) **243**, 183–187 (2006).
  ⇒ L. cytowań: 2 (0)
- 16. A. Rycerz, J. Spałek, Conductance of a double quantum dot with correlation–induced wave function renormalization, Physica B 378–380, 935–937 (2006).
  ⇒ L. cytowań: 2 (0)
- 17. J. Tworzydło, B. Trauzettel, M. Titov, A. Rycerz, C.W.J. Beenakker, Sub–Poissonian shot noise in graphene, Phys. Rev. Lett. 96, 246802 (2006) pp. 1–4.
  ⇒ L. cytowań: 171 (164)
- 18. A. Rycerz, Entanglement and transport through correlated quantum dot, Eur. Phys. J. B. 52 291–296 (2006).
  ⇒ L. cytowań: 6 (5)
- 19. A. Rycerz, J. Tworzydło, C.W.J. Beenakker, *Valley filter and valley valve in graphene*, Nature Physics 3, 172–175 (2007).
  ⇒ L. cytowań: 103 (98)
- 20. J. Spałek, E.M. Görlich, A. Rycerz, R. Zahorbeński, *The combined exact diagonalization ab initio approach and its application to correlated electronic states and Mott-Hubbard localization in nanoscopic systems*, J. Phys. Condens. Matter 19, 255212 (2007) pp. 1–43.
  ⇒ L. cytowań: 2 (1)

- 21. A. Rycerz, J. Spałek, Josephson network as a model for inhomogeneous superconductor: A microwave power absorption, Acta Phys. Polon. A 111, 581–594 (2007).
  ⇒ L. cytowań: 0
- 22. A. Rycerz, J. Tworzydło, C.W.J. Beenakker, Anomalously large conductance fluctuations in weakly disordered graphene, Europhys. Lett. **79**, 57003 (2007) pp. 1–5.
  ⇒ L. cytowań: 25 (21)
- 23. P. Recher, B. Trauzettel, A. Rycerz, Ya.M. Blanter, C.W.J. Beenakker, A.F.Morpurgo, *Aharonov-Bohm effect and broken valley-degeneracy in graphene rings*, Phys. Rev. B 76, 235404 (2007) pp. 1–6.
  ⇒ L. cytowań: 17 (15)
- 24. A. Rycerz, *Diatomic molecule as a quantum entanglement switch*, Physica B 403, 1534–1536 (2008).
  ⇒ L. cytowań: 0
- 25. A.R. Akhmerov, J.H. Bardarson, A. Rycerz, C.W.J. Beenakker, *Theory of the valley-valve effect in graphene nanoribbons*, Phys. Rev. B **77**, 205416 (2008) pp. 1–5. ⇒ L. cytowań: 17 (17)
- 26. A. Rycerz, *Nonequilibrium valley polarization in graphene nanoconstrictions*, phys. stat. sol. (a) **205**, 1281–1289 (2008).
  ⇒ L. cytowań: 8 (6)
- 27. J. Wurm, A. Rycerz, I. Adagideli, M. Wimmer, K. Richter, H.U. Baranger, Symmetry Classes in Graphene Quantum Dots: Universal Spectral Statistics, Weak Localization, and Conductance Fluctuations, Phys. Rev. Lett. 102, 056806 (2009) pp. 1–4.
  ⇒ L. cytowań: 8 (7)
- 28. A. Rycerz, Aharonov-Bohm Effect and Valley Polarization in Nanoscopic Graphene Rings, Acta Phys. Polon. A 115, 322–325 (2009).
  ⇒ L. cytowań: 0
- 29. A. Rycerz, P. Recher, M. Wimmer, *Conformal mapping and shot noise in graphene*, Phys. Rev. B 80, 125417 (2009) pp. 1–14.
  ⇒ L. cytowań: 0

Ponadto, przesłano do druku pracę:

30. A. Rycerz, *Magnetoconductance of the Corbino disk in graphene*, arXiv:0909. 3018, przesłane do Phys. Rev. B.

Łączna liczba cytowań: 466, po odjęciu cytowań własnych: 357. Listę sporządzono z użyciem bazy danych *Web of Science*, po jej ostatniej aktualizacji z dnia 17 października br.

#### B. Publikacje w wydawnictwach książkowych

- J. Spałek, A. Rycerz, W. Wójcik, R. Podsiadły, *Lattice fermions with optimized wave functions: Exact results*, w: *Open Problems in Strongly Correlated Electron Systems*, pod red. J. Bonca *et al.*, Kluwer Acad. (Dortrecht, 2001) pp. 443–445.
- A. Rycerz, J. Spałek, R. Podsiadły, W. Wójcik, A combined exact diagonalization ab initio study of the metallicity and electron localization in nanoscopic systems, w: Lectures on the Physics of Highly Correlated Electron Systems VI, pod red. F. Mancini, AIP Conf. Proc. Vol. 629 (New York, 2002) pp. 213–222.
- J. Spałek, E.M. Görlich, A. Rycerz, R. Zahorbeński, R. Podsiadły, W. Wójcik, Properties of correlated nanoscopic systems from the combined exact diagonalization – ab initio method, w: Concepts in Electron Correlations, pod red. A.C. Hewson and V. Zlatić, Kluwer Acad. (Dortrecht, 2003) pp. 257–268.
- A. Rycerz, J. Spałek, Properties of a correlated nanoscopic chain close to the metalinsulator transition, w: Lectures on the Physics of Highly Correlated Electron Systems VII, pod red. F. Mancini, AIP Conf. Proc. Vol. 678 (New York, 2003) pp. 313–322.
- J. Spałek, A. Rycerz, E.M. Görlich, R. Zahorbeński, *Electron correlation at nanoscale*, w: *Highlights of Condensed Matter Physics*, AIP Conf. Proc. Vol. 695 (New York, 2003) pp. 291–303.
- E.M. Görlich, J. Kurzyk, A. Rycerz, R. Zahorbeński, W. Wójcik, J. Spałek, *Electronic states of nanoscopic chains and rings from first principles: EDABI method*, w: *Molecular Nanowires and Other Quantum Objects*, pod red. A.S. Alexandrov *et al.*, Kluwer Acad. (Dortrecht, 2004) pp. 355–375.
- A. Rycerz, J. Spałek, *Physical properties of correlated electrons in nanochains from EDABI method*, w: *Lectures on the Physics of Highly Correlated Electron Systems VIII*, pod red. A. Avella and F. Mancini, AIP Conf. Proc. Vol. 715 (New York, 2004) pp. 235–244.
- 8. B. Trauzettel, J. Tworzydło, M. Titov, A. Rycerz, C.W.J. Beenakker, *Minimum conductivity and maximum Fano factor in mesoscopic graphene*, Proceedings of the VIth Rencontres du Vietnam (Hanoi, 2006).

## I. OPIS ROZPRAWY HABILITACYJNEJ

Wkrótce po odkryciu grafenu przez zespół z Uniwersytetu w Manchesterze [Nov04] ta nowa odmiana węgla stała się tematem tak wielu prac naukowych, iż obecnie możemy mówić o odrębnej dziedzinie badań w ramach fizyki materii skondensowanej [Cas09]. Powodem zainteresowania licznych zespołów teoretycznych i doświadczalnych są nie tylko intrygujące własności fizyczne grafenu, który pozwala testować przewidywania relatywistycznej mechaniki kwantowej w fazie skondensowanej, ale przede wszystkim fakt, iż grafen jest rozważany jako następca krzemu w przyszłych układach elektronicznych [Gei09], a ponadto (z uwagi na swoje nietypowe własności fizyczne) stwarza teoretyczne możliwości budowy urządzeń nie mających odpowiedników w elektronice krzemowej [Nov04, Ber04].

Tym właśnie aspektom *relatywistycznej fizyki materii skondensowanej*, za której umowny początek można przyjąć pomiar przewodnictwa elektrycznego grafenu [Nov05], poświęcona jest niniejsza rozprawa.

# A. Wprowadzenie: Grafen jako dwuwymiarowy gaz bezmasowych elektronów relatywistycznych

Własności fizyczne grafenu mają swoje źródło w jego strukturze pasmowej [Wal47, Clu57, Slo58], przedstawionej schematycznie na Rysunku 1. W zakresie niskich energii relację dyspersji dobrze przybliża sześć struktur stożkowych, scentrowanych w narożach pierwszej strefy Brillouina, spośród których tylko dwie (zwykle nazywane *dolinami* K i K') są nierównoważne. Przykładowo, dynamika elektronów w pobliżu punktu K opisana jest efektywnym



**Rysunek 1**: Układ atomów w monowarstwie grafenowej (*część lewa*). Komórka elementarna zawiera dwa atomy węgla, oznaczone jako A i B, z których każdy generuje sieć trójkątną. W strukturze pasmowej grafenu (*część prawa*) występuje pasmo przewodnictwa (E > 0) i pasmo walencyjne (E < 0), które stykają się w sześciu punktach nazywanych punktami Diraca. Trzy spośród nich zaznaczone czarnymi (białymi) kółkami połączone są z punktem K (K') za pośrednictwem wektorów sieci odwrotnej, są zatem od niego nierozróżnialne.

równaniem falowym dla bezmasowych cząstek o spinie 1/2 [Sem84, Vin84]

$$-i\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix}.$$
 (1)

Prędkość  $v_F \equiv \frac{1}{2}\sqrt{3}\tau a/\hbar \approx 10^6$  m/s jest wprost proporcjonalna do całki przeskoku  $\tau \approx 3$  eV i stałej sieci a = 0.246 nm, zaś spinorowa funkcja falowa  $\Psi = [\Psi_A, \Psi_B]^T$  opisuje amplitudę prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na atomach należących do poszczególnych podsieci. Równanie (1) zwykle zapisuje się w formie  $H_0\Psi = E\Psi$ , gdzie  $H_0 = v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$  jest operatorem zbudowanym z macierzy Pauliego, zaś  $\boldsymbol{p} = -i\hbar(\partial_x, \partial_y)$  jest operatorem pędu działającym w płaszczyźnie warstwy grafenowej. Postać równania falowego dla punktu K' zależy od reprezentacji, możliwy jest taki jej wybór aby równanie (1) pozostało niezmienione [Bee08]. Wielkości addytywne, jak na przykład przewodnictwo elektryczne, na ogół są sumą wkładów pochodzących od nośników w pobliżu obu punktów Diraca, nie jest tak jednak zawsze. Tzw. *indeks dolinowy*, przyjmujący wartości K lub K', jest w ogólnym przypadku dodatkowym stopniem swobody (pseudospinem), który w konkretnych układach jest zachowany lub nie. Rozpraszanie nośników pomiędzy punktami K i K', wraz z konsekwencjami dla wielkości mierzalnych jest szczegółowo badane w dalszych częściach tej rozprawy.

Jedną z unikalnych cech grafenu jest możliwość precyzyjnego sterowania domieszkowaniem układu w szerokim zakresie, zarówno dla elektronów jak i dziur, poprzez zmianę zewnętrznego potencjału elektrostatycznego [Nov04]. W przypadku idealnie czystej, balistycznej próbki, teoretycznie możliwe jest otrzymanie zerowego wypełnienia dla całej warstwy (próbki z nieporządkiem wykazują strukturę domenową, w której sąsiadują ze sobą małe obszary o różnym domieszkowaniu). Co ciekawe, zerowemu wypełnieniu towarzyszy co prawda zerowa gęstość stanów, ale przewodnictwo właściwe układu jest różne od zera i wyraża się przez stałe fundamentalne [Kat06, Two06]

$$\sigma_0 = \frac{4e^2}{\pi h} = (20.3 \, k\Omega)^{-1}.\tag{2}$$

Początkowo, pomiary przewodnictwa elektrycznego grafenu dawały kilkakrotnie wyższą wartość  $\sigma_{\star} \approx 4e^2/h$  (która odpowiada oporności  $6.5 k\Omega$ ) [Nov05], co zostało szybko zinterpretowane w ramach kilku (konkurencyjnych) modeli nieporządku w układzie [Nom07, Tit07, A.6]. "*Brakujący czynnik*  $1/\pi$ " został ostatecznie odnaleziony w 2007 roku przez zespół z Uniwersytetu w Riverside [Mia07], który uzyskał zgodność ze wzorem (2) na poziomie 20%. Istotną sprawą było skupienie uwagi na małych, balistycznych próbkach o rozmiarach liniowych nie przekraczających 500 nm i szerokości kilkakrotnie większej niż długość. W takich próbkach wpływ nieporządku i efektów brzegowych na transport elektronów jest niewielki.

Inną ciekawą konsekwencją relatywistycznego równania falowego (1) jest wartość absorpcji światła widzialnego, przechodzącego przez warstwę grafenu, która wynosi w przybliżeniu 2.3% i jest równa iloczynowi liczby  $\pi$  i stałej struktury subtelnej  $\alpha = e^2/hc = 1/137.06$ [Nai08]. Pokazuje to, że wiele przewidywań prostego modelu grafenu stworzonego do opisu stanu podstawowego i wzbudzeń niskoenergetycznych, stosuje się w praktyce do opisu zjawisk fizycznych w zakresie energii około 1 eV.

#### B. Nowa koncepcja elektroniki kwantowej

Jak wspomniano powyżej, elektrony na poziomie Fermiego występują w grafenie w dwóch rodzinach, skupionych w obszarach wokół punktów K i K' w pierwszej strefie Brillouina, zwanych dalej *dolinami*. Mechanizm kontrolowanego obsadzania wybranej doliny zaproponowano w pracy [A.1] otwierającej tę rozprawę, a następnie szczegółowo przedyskutowano w pracach [A.2, A.3]. Mechanizm ten stanowi podstawę teoretyczną nowej, proponowanej dziedziny nanoelektroniki kwantowej, w ramach której operacje na pseudospinie dolinowym, wykonywane za pomocą urządzeń nazwanych *filtrem* i *zaworem dolinowym*, zastępują analogiczne operacje na spinie elektronu w spintronice [Wol01] i tej gałęzi obliczeń kwantowych, która wykorzystuje spin elektronu [Cer05].

Analiza teoretyczna nanostruktur grafenowych wymaga uzupełnienia równania Diraca (1) o odpowiednie warunki brzegowe, które w ogólności mogą sprzęgać elektrony w dolinach K i K'. W szczególnych sytuacjach możliwy jest opis analityczny problemu, w przypadku struktur takich jak filtr i zawór dolinowy konieczne jest jednak wyjście poza ramy modelu efektywnego i dyskusja Hamiltonianu ciasnego wiązania, który dla układu w zewnętrznym polu elektromagnetycznym ma postać

$$H = \sum_{i,j} \tau_{ij} |i\rangle \langle j| + \sum_{i} V_i |i\rangle \langle i|.$$
(3)

 $V_i$  jest tutaj zależnym od położenia potencjałem elektrostatycznym, pole magnetyczne (zadane potencjałem A) wprowadzamy poprzez tzw. podstawienie Peierlsa

$$\tau_{ij} = -\tau \exp\left(\frac{2\pi i}{\Phi_0} \int_{\mathbf{R}_i}^{\mathbf{R}_j} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}\right),\tag{4}$$

gdzie  $\Phi_0 = h/e$  jest kwantem strumienia magnetycznego. Orbitale  $|i\rangle$  i  $|j\rangle$  zlokalizowane są na najbliższych węzłach sieci typu plaster miodu (położonych w punktach  $\mathbf{R}_i$  i  $\mathbf{R}_j$ ), w przeciwnym wypadku element macierzy przeskoku  $\tau_{ij} = 0$ . W przypadku, gdy badano strukturę energetyczą układu [A.4, A.7] Hamiltonian (3) był diagonalizowany numerycznie z użyciem standardowych technik. W pozostałych pracach rozważano zagadnienia rozpraszania na sieci typu plaster miodu, dla której zaadaptowano metodę numeryczną opracowaną wcześniej przez Ando [And91] dla sieci kwadratowej.

W pracy [A.1] pokazujemy, że prąd elektryczny przepływający przez zwężenie pomiędzy dwoma szerokimi obszarami grafenu (filtr dolinowy) jest spolaryzowany pseudospinowo, jeśli krawędzie zwężenia są typu *zigzag*. Dla innych kierunków krystalograficznych osi zwężenia filtr zachowuje swoje działanie pod warunkiem, że oś ta nie jest równoległa do linii *arm-chair* grafenu [A.3]. Źródło fizyczne działania filtra dolinowego tkwi w szczególnej strukturze energetycznej pasków grafenu o brzegach typu zigzag [Fuj96, Nak96]. Najniższe pasmo elektronowe (oraz najwyższe pasmo dziurowe) nie posiada dodatkowej degeneracji związanej z pseudospinem dolinowym, którą posiadają wyższe pasma. Prowadzi to do uformowania w pasku tzw. *stanu brzegowego*, dla którego przy ustalonym kierunku propagacji mamy tylko jedną dopuszczalną wartość pseudospinu dolinowego. Przedstawiony obraz—w zakresie niskich energii—zasadniczo nie zmienia się dla innych orientacji krystalograficznych [Akh08b],

za wyjątkiem pasków o brzegach typu armchair. Co ciekawe, nanourządzenie (o brzegach typu zigzag) zbudowane zaledwie z kilkuset atomów pozwala teoretycznie otrzymać polaryzację dolinową powyżej 95%, przez co stanowi ciekawą alternatywę dla filtrów spinowych. Działanie filtra jest przy tym wyjątkowo odporne na uszkodzenia jego krawędzi, przykładowo po usunięciu 10% losowo wybranych atomów z krawędzi polaryzacja prądu pozostaje na poziomie 85%.

Niezmiernie istotną cechą filtra dolinowego jest, iż jego działanie można kontrolować elektrostatycznie poprzez napięcie bramki: polaryzacja otrzymywana dla wypełnienia elektronowego obszaru zwężenia jest przeciwna niż dla wypełnienia dziurowego. Z tego powodu, dwa filtry umieszczone jeden za drugim tworzą zawór dolinowy: prąd płynie przez taki układ bez przeszkód w przypadku zgodnych polaryzacji filtrów składowych, w przypadku polaryzacji przeciwnych natężenie prądu ulega osłabieniu, w wielu wypadkach praktycznie do zera. Szczegółowe działanie zaworu dolinowego jest przedmiotem pracy [A.2]. Okazuje się m. in. że działanie *zamkniętego* zaworu (przeciwne polaryzacje filtrów składowych) zależy od tego, czy liczba atomów węgla w poprzek zwężenia jest parzysta czy też nieparzysta, jak również od orientacji linii p–n rozdzielającej filtry składowe. Obrót tej linii, który można wymusić manipulując zewnętrznym polem elektrycznym, prowadzi do ciekawego efektu przejawiającego się sinusoidalnymi oscylacjami przewodnictwa elektrycznego układu.

Odrębna gałąź badań dotyczy zastosowania grafenu jako materiału bazowego do realizacji obliczeń kwantowych, wykorzystujących spin elektronu uwięzionego w kropce kwantowej [Tra07]. W tym kontekście, dodatkowa degeneracja poziomów energetycznych (związana z pseudospinem dolinowym) jest przeszkodą, którą należy wyeliminować aby możliwe było wykonywanie operacji na q-bitach spinowych. W pracy [A.4] pokazujemy, że w pierścieniach grafenowych z tzw. uwięzieniem masowym [Ber87] poziomy energetyczne odpowiadające dolinom K i K' ulegają rozszczepieniu dla różnych od zera wartości strumienia magnetycznego przechodzącego przez pierścień. Zjawisko to, przewidziane teoretycznie, ma obserwowalne konsekwencje w postaci prądów trwałych i rezonansowej struktury przewodnictwa pierścienia. Rozszczepienie poziomów w obecności strumienia magnetycznego pojawia się także w pierścieniach z brzegami typu zigzag, badanych numerycznie w ramach modelu ciasnego wiązania (3), przy czym niewielka asymetria takiego pierścienia modyfikuje jedynie strukturę elektronową dla małych wartości strumienia, gdzie pojawiają się przerwy energetyczne nieobecne dla idealnego pierścienia. Dla większych wartości strumienia, struktura elektronowa pozostaje praktycznie niezmieniona. Sugeruje to, że proponowany mechanizm usuwania degeneracji dolinowej będzie odporny na drobne defekty, niemożliwe do usunięcie w realistycznych układach.

Efekt Aharonowa-Bohma w grafenie jest także przedmiotem pracy [A.5], w której badamy numerycznie przewodnictwo pierścienia podłączonego szeregowo do dwóch filtrów dolinowych i umieszczonego w jednorodnym polu magnetycznym. Przewodnictwo układu oscyluje periodycznie w funkcji strumienia magnetycznego przechodzącego przez układ (z okresem równym kwantowi strumienia  $\Phi_0 \equiv h/e = 4.1 \cdot 10^{-15}$  Wb), przy czym szczegółowa postać tych oscylacji zależy od polaryzacji dołączonych filtrów. Analiza fourierowska magnetoprzewodnictwa pokazuje, że dla przeciwnych polaryzacji filtrów pierwsza składowa harmoniczna ulega wyraźnemu osłabieniu (w porównaniu z wartością otrzymaną dla polaryzacji zgodnych), podczas gdy wyższe składowe ulegają nieznacznemu wzmocnieniu. Interpretacja fizyczna tych obserwacji jest stosunkowo prosta. Elektron po przejściu przez pierwszy filtr ma ustalony pseudospin dolinowy (K lub K'), zatem przejście przez drugi filtr, o polaryzacji przeciwnej, na ogół wymaga parokrotnego okrążenia pierścienia, aby pseudospin elektronu uległ zmianie w wyniku wielokrotnych zderzeń z nieregularnymi brzegami układu. Średni czas rozpraszania elektronu pomiędzy dolinami K i K' jest przy tym wyraźnie dłuższy od semiklasycznego czasu uwięzienia [Ric02]. Polaryzacja filtra wejściowego i wyjściowego pozwala zatem efektywnie kontrolować czas uwięzienia elektronu Diraca w pierścieniu Aharonowa-Bohma za pośrednictwem zewnętrznego potencjału elektrostatycznego.

#### C. Chaos kwantowy w grafenie

Punktem odniesienia dla dyskusji chaosu w grafenie jest historyczna praca Berry'ego i Mondragona [Ber87], w której dyskutowana jest struktura energetyczna bilardów kwantowych dla neutrin. Uwięzienie tych cząstek zrealizowane jest poprzez obecność wyrazu masowego  $m(x, y)\sigma_z$  w Hamiltonianie Diraca. Wyraz ten jest równy zero wewnątrz układu, natomiast na zewnątrz rośnie do nieskończoności (warunek brzegowy typu *nieskończona masa*), co zapewnia znikanie składowej prądu normalnej do brzegu układu. Taki warunek brzegowy łamie symetrię względem odwrócenia czasu (także w zerowym polu magnetycznym) i sprawia, że jeśli układ jest niecałkowalny—statystyka poziomów energetycznych odpowiada przewidywaniom teorii macierzy przypadkowych dla gaussowkiego zespołu *unitarnego* [Meh04].

W przypadku grafenu, sytuacja komplikuje się ze względu na obecność dodatkowego pseudospinu. W obecności zewnętrznego pola magnetycznego, Hamiltonian efektywny dla wzbudzeń niskoenergetycznych można zapisać jako

$$H_{\text{eff}} = v_F(p_x - eA_x)\sigma_x \otimes \tau_z + v_F(p_y - eA_y)\sigma_y \otimes \tau_0 + m(x, y)\sigma_z \otimes \tau_0, \tag{5}$$

gdzie macierze Pauliego  $\sigma_i$  oraz  $\tau_i$  działają w przestrzeni podsieciowych i dolinowych (odpowiednio) stopni swobody, przy czym  $\sigma_0$  i  $\tau_0$  są macierzami jednostkowymi. Symetrie Hamiltonianu (5) określone są przez operatory antyunitarne [Suz02, Can06]

$$\mathcal{T} = (\sigma_0 \otimes \tau_x)\mathcal{C}, \qquad \qquad \mathcal{T}_{\rm sl} = -i(\sigma_y \otimes \tau_0)\mathcal{C}, \qquad (6)$$

gdzie C oznacza operację sprzężenia zespolonego. T jest standardowym operatorem odwrócenia czasu, zaś  $T_{sl}$  jest specyficznym dla grafenu operatorem odwrócenia czasu w pojedynczej dolinie (K lub K'), dla którego zachodzi  $T_{sl}^2 = -I$ , jest zatem nazywany operatorem symetrii symplektycznej [Bee08]. W najciekawszym z punktu widzenia teorii przypadku, gdy mamy do czynienia z uwięzieniem masowym zaś pseudospin dolinowy jest zachowany, globalna symetria T nie jest łamana (dla B = 0), mamy jednak do czynienia z dwoma niezależnymi podukładami (dla dolin K i K'), dla każdego łamana jest specjalna symetria  $T_{sl}$ . Z tego powodu scenariusz Berry'ego i Mondragona dla układów niecałkowalnych jest odtwarzany, mamy jedynie dodatkowo degenerację dolinową. W rzeczywistym układzie grafenowym nieporządek krótkozasięgowy może jednak eliminować rolę symetrii  $T_{sl}$  [Suz02]. Wówczas dla B = 0 operator T nadal komutuje z  $H_{eff}$ , będziemy mieli zatem do czynienia z *ortogonalną* klasą symetrii, zaś dla  $B \neq 0$  otrzymamy zespół unitarny, lecz tym razem bez degeneracji dolinowej. Innymi słowy, rozpraszanie elektronów pomiędzy dolinami może efektywnie *odtwarzać* symetrię ortogonalną w zerowym polu magnetycznym. Wyniki doświadczalne dla kropek kwantowych wykonanych z grafenu [Pon08, Sta08] nie pozwalają niestety na jednoznaczną identyfikacją klasy symetrii na podstawie statystyk poziomów energetycznych dla takich układów. Z tego powodu, w pracy [A.7] analizujemy, za pomocą symulacji komputerowych, dwa różne scenariusze realizacji chaosu kwantowego w nieregularnych płatkach grafenowych, wraz z konsekwencjami dla wielkości mierzalnych tj. widm energetycznych układów *zamkniętych* i transportu elektronów przez układy *otwarte*. W każdym z przypadków rozważamy Hamiltonian typu ciasnego wiązania (3) na sieci, zaś rozmiary liniowe układu modelowego wynoszą około 50 nm, co jest wartością zbliżoną do rozmiarów płatków badanych przez zespoły doświadczalne.

W ramach pierwszego scenariusza, z monowarstwy grafenowej wycięto nieregularny płatek w taki sposób, aby wzdłuż jego krawędzi rozmieszczone były w przypadkowym porządku atomy należące do podsieci A i B. W ten prosty sposób w układzie zrealizowany został nieporządek krótkozasięgowy, który prowadzi do stosunkowo silnego rozpraszania elektronów pomiędzy dolinami. Z tego powodu, w układzie zamkniętym obserwowano statystykę poziomów energetycznych zgodną z przewidywaniami teorii macierzy przypadkowych dla gaussowskiego zespołu ortogonalnego w przypadku B = 0 i unitarnego w przypadku  $B \neq 0$  (odchylenia od rozkładu unitarnego stawały się statystycznie nieistotne gdy całkowity strumień przez układ zbliżał się do wartości  $\Phi_0 = h/e$ ). Analogicznie, w układzie otwartym obserwowano zjawisko słabej lokalizacji, oraz wartości uniwersalnych fluktuacji przewodnictwa zgodne z odpowiednimi przewidywaniami teorii macierzy przypadkowych dla kwantowego transportu elektronów [Bee97]. Wyniki otrzymane w tej części pracy, dotyczące statystyki poziomów energetycznych, zostały potwierdzone dzięki podobnym symulacjom wykonanym niezależnie przez zespół z Uniwersytetu Technicznego w Wiedniu [Lib09].

W ramach drugiego scenariusza, w identycznych płatkach grafenowych wprowadzono wyraz masowy Hamiltonianu (5), który na poziomie modelu ciasnego wiązania realizuje się poprzez potencjał alternujący pomiędzy podsieciami. Amplituda takiego potencjału osiągała wartość  $\approx 2 \,\text{eV}$  na krawędzi płatka i szybko zanikała wraz z odległością od krawędzi. Fizycznie, przyczyną występowania potencjału alternującego w układzie może być spontaniczne uporządkowanie antyferromagnetyczne spinów elektronów, zaindukowane oddziaływaniem kulombowskim [Son06, Wim08], które jest słabo ekranowane na krawędzi płatka. W obecności wyrazu masowego, odpowiednie charakterystyki statystyczne obliczone dla nanoukładów zamkniętych i otwartych sugerują, że ich klasy symetrii są różne (dla B = 0). Ten pozorny paradoks stanowi centralny wynik pracy [A.7] i posiada stosunkowo proste wyjaśnienie. W małych układach dyskretnych, wyraz masowy istotnie wydłuża średni czas rozpraszania elektronów pomiędzy dolinami, jednak czas ten nadal pozostaje skończony. W układzie otwartym zjawiska o skalach czasowych dłuższych niż czas uwięzienia mają mały wpływ na wielkości mierzalne, dlatego obserwujemy znaczne osłabienie efektu słabej lokalizacji (efekt ten nie występuje w układach chaotycznych o unitarnej klasie symetrii [Bee97]), któremu towarzyszą wartości fluktuacji przewodnictwa zbliżone do oczekiwanych dla układu o statystyce unitarnej (z dodatkową degeneracją dolinową). Dla układu zamkniętego z kolei, charakterystyczną skalą czasową jest znacznie dłuższy czas Plancka, w porównaniu z którym pseudospin dolinowy jest rozpraszany szybko, i statystyki poziomów energetycznych wskazują na ortogonalną klasę symetrii, wykazując jedynie nieznaczne różnice w porównaniu z otrzymanymi dla płatków bez wyrazu masowego (szybsza zbieżność do statystyki unitarnej przy wzroście pola magnetycznego). Wydaje się zatem, że realizacji fizycznej układu o unitarnej klasie symetrii w zerowym polu, rozważanego teoretycznie przez Berry'ego i Mondragona, należy szukać raczej pośród grafenowych nanoukładów otwartych, niż w obszarze blokady kulombowskiej, jak to czyniono do tej pory.

Wyniki opisane w pracy [A.7] znacząco uzupełniają ustalenia wczesnej pracy [A.6], która także stanowi część tej rozprawy. Pokazano w niej, że: (i) fluktuacje przewodnictwa prostokątnego paska grafenowego z nieporządkiem zgadzają się z wartościami uniwersalnymi dla ortogonalnej klasy symetrii, jeśli potencjał definiujący nieporządek (typu Andersona) szybko zmienia się w skali długości komórki elementarnej, lub (ii) fluktuacje przewodnictwa znacznie te wartości przewyższają, jeśli potencjał wolno zmienia się w funkcji położenia. W drugim przypadku, ograniczone rozmiary układów badanych numerycznie, nie pozwoliły jednak sformułować jednoznacznych wniosków fizycznych.

#### D. Symetria i tunelowanie elektronów Diraca w nanoukładach

Oprócz przewodnictwa właściwego, którego wartość (2) wyraża się przez stałe fundamentalne, kwantowy transport elektronów w balistycznym grafenie charakteryzuje jeszcze jedna ciekawa własność. Wiąże się ona ze zjawiskem *szumu śrutowego*, czyli fluktuacji prądu elektrycznego wynikających z kwantowej natury ładunku elektrycznego, i obserwowanych w wielu układach nanoelektronicznych [Bla00, Bee03]. Gęstość widmowa szumu śrutowego definiuje się poprzez transformatę funkcji korelacji dla prądów mierzonych w różnych chwilach czasu

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \Delta I(t+t_0) \Delta I(t_0) \rangle, \tag{7}$$

gdzie  $\Delta I(t)$  oznacza fluktuację prądu wokół wartości średniej  $\overline{I}$ , zaś  $\langle \ldots \rangle$  oznacza średniowanie po czasie początkowym  $t_0$ . W granicy niskich temperatur i częstości, wyrażenie (7) można zapisać jako

$$S = 2eV\frac{se^2}{h}\sum_n T_n(1-T_n),\tag{8}$$

gdzie V oznacza różnicę potencjałów po obu stronach układu,  $T_n$  jest prawdopodobieństwem przejścia elektronu dla *n*-tego modu normalnego, zaś *s* oznacza degenerację stanów zależną od symetrii układu. Czynnik  $1 - T_n$  we wzorze (8) wprowadza redukcję fluktuacji prądu ze względu na zakaz Pauliego, bez tego czynnika otrzymalibyśmy  $S = S_{\text{Poisson}} \equiv 2e\bar{I}$ . W praktyce, charakteryzując szum śrutowy wygodnie jest posługiwać się bezwymiarowym współczynnikiem Fano  $F \equiv S/S_{\text{Poisson}}$ .

W przypadku niedomieszkowanego grafenu, współczynnik Fano wynosi F = 1/3 [Two06], co jest równe wartości dla metalu z nieporządkiem [Bee92, Nag92]. Wynik ten jest dość nieoczekiwany, gdyż układ badany teoretycznie w pracy [Two06] był balistyczny. Analogia pomiędzy balistycznym grafenem a dyfuzyjnym metalem okazuje jeszcze głębsza, zgodność dotyczy nie tylko współczynnika Fano, ale również rozkładu statystycznego prawdopodobieństw przejścia  $\rho(T)$ , który dla obu układów ma postać

$$\rho(T) \propto \frac{1}{T\sqrt{1-T}}.$$
(9)

Z tego powodu przyjęto mówić o *pseudodyfuzyjnym* transporcie elektronów w grafenie. Przewidywania pracy [Two06] dla współczynnika Fano zostały niedawno potwierdzone w dwóch niezależnych eksperymentach [Car08, Dan08]. Zgodność z teorią (na poziomie 10%) uzyskano jednak wyłącznie dla próbek o dużym stosunku szerokości do długości W/L > 10, podobnie sytuacja wygląda dla przewodnictwa elektrycznego [Mia07]. Sugeruje to istotny wpływ zjawisk zachodzących na krawędziach układu na transport elektronów. Praca [Two06] przewiduje wprawdzie zależność przewodnictwa i współczynnika Fano od warunków brzegowych, znika ona jednak dla  $W/L \gtrsim 4$ .

Opisana wyżej rozbieżność teorii z doświadczeniem (dla próbek prostokątnych o małym W/L) stanowiła motywację dla pracy [A.8] wchodzącej w skład tej rozprawy. W pracy rozważamy transport elektronów przez próbki grafenowe o różnych kształtach, które zostały tak dobrane, aby rola krawędzi układu została całkowicie wyeliminowana (geometria typu Corbino) lub znacznie ograniczona (układy, w których gęstość prądu szybko maleje z odległością od osi symetrii). Rozwiązania analityczne zagadnienia rozpraszania dla badanych układów otrzymano stosując mapowanie konforemne na prostokątny pasek grafenowy. Możliwość taka wynika z faktu, że rozwiązanie ogólne równania Diraca (1) dla E = 0 ma postać

$$\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} \Psi_A(x+iy) \\ \Psi_B(x-iy) \end{pmatrix},\tag{10}$$

gdzie  $\Psi_A$  i  $\Psi_B$  są funkcjami holomorficznymi. Zatem po przekształceniu układu współrzędnych zadanym funkcją analityczną  $z(w) \equiv x(u+iv)+iy(u+iv)$ , spinor zbudowany ze składników  $\Psi_A = \Psi_A(z(w))$  i  $\Psi_B = \Psi_B(z(w^*))$  jest rozwiązaniem równania Diraca w nowych zmiennych (u, v). Stosowalność przedstawionego krótko powyżej podejścia do problemu rozpraszania w układzie otwartym wynika dalej ze specyficznej dla grafenu niezależności prawdopodobieństw przejścia od parametrów Hamiltonianu opisującego gaz elektronowy w doprowadzeniach [Sch07]. Ponadto, działanie metody dla nanoukładów weryfikujemy w pracy [A.8] poprzez porównanie wyników analitycznych z otrzymanymi niezależnie z pomocą symulacji komputerowych lub innych technik analitycznych, jeśli są dostępne (a jest tak w przypadku dysku Corbino).

Dla wszystkich geometrii rozważanych w pracy [A.8] stwierdzono występowanie transportu pseudodyfuzyjnego. Ma to miejsce w zakresie parametrów geometrycznych, dla których układ można odwzorować konforemnie na pasek grafenowy z  $W/L \gg 1$ . Poza tym zakresem, zidentyfikowano nowy rodzaj transportu tunelowego, dla którego przewodnictwo elektryczne wykazuje zanik potęgowy z rozmiarem liniowym układu

$$G \propto L^{-\alpha},$$
 (11)

gdzie  $\alpha$  jest wykładnikiem zależnym od geometrii układu (w najprostszym przypadku dysku Corbino mamy  $\alpha = 1$ ). Ponadto, w obszarze transportu tunelowego obserwujemy asymptotyczną relację pomiędzy przewodnictwem elektrycznym i współczynnikiem Fano

$$G \approx \frac{se^2}{h} \times (1 - F), \tag{12}$$

gdzie s = 8 dla geometrii Corbino, która zachowuje pełną (symplektyczną) klasę symetrii równania Diraca, s = 4 dla układów z warunkami brzegowymi typu nieskończona masa,

które łamią symetrię symplektyczną lecz nie rozpraszają elektronów pomiędzy dolinami K i K', lub s = 2 gdy pseudospin dolinowy nie jest zachowany (co ma miejsce np. w obecności krawędzi typu armchair). Relacja (12) stanowi zatem wygodne narzędzie do identyfikacji klasy symetrii nanoukładu grafenowego (bez odwoływania się do jego parametrów geometrycznych), które może zastąpić analizę rozkładu statystycznego poziomów energetycznych i fluktuacji przewodnictwa, dyskutowane w poprzednim rozdziale.

W pracy [A.9], która zamyka przedłożoną rozprawę, obliczono analitycznie przewodnictwo elektryczne dysku Corbino w grafenie, dla dowolnego domieszkowania i indukcji jednorodnego pola magnetycznego. Pokazano, że w pobliżu punktu Diraca przewodnictwo oscyluje periodycznie (w dobrym przybliżeniu: sinusoidalnie) jako funkcja strumienia magnetycznego przechodzącego przez powierzchnię dysku, okres oscylacji jest przy tym równy  $(2h/e)\ln(R_2/R_1)$ , gdzie  $R_1$  i  $R_2$  oznacza wewnętrzny i zewnętrznym promień dysku. Amplituda oscylacji szybko wzrasta z ilorazem  $R_2/R_1$ , przekraczając 10% wartości średniej dla  $R_2/R_1 \ge 5$ . Ze wzrostem domieszkowania, obszar przewodzący na diagramie domieszkowanie-pole magnetyczne początkowo maleje, a następnie rośnie, gdyż dla dużych domieszkowań układ zachowuje się kwaziklasycznie (tj. przewodzi prąd elektryczny gdy średnica orbity cyklotronowej  $2r_c > R_2 - R_1$ , gdzie  $r_c = \hbar k_F/eB$ ). W obszarze pośrednim pomiędzy transportem tunelowym a balistycznym, dysk wykazuje maksymalny magnetoopór gdy wektor falowy na poziomie Fermiego  $k_F \approx (R_2 - R_1)^{-1}$ . Dla dużych wypełnień i silnych pól magnetycznych pojawia się przewodnictwo rezonansowe dla poziomów Landaua, tj. gdy  $r_c k_F = 2n$ , gdzie *n* jest liczbą całkowitą. Manipulując domieszkowaniem i polem magnetycznym w taki sposób, aby układ cały czas znajdował się na n-tym poziomie Landaua, otrzymujemy ponownie sinusoidalne oscylacje przewodnictwa, podobne do obserwowanych w pobliżu punktu Diraca. W tym sensie punkt Diraca można uważać za zerowy poziom Landaua próbki grafenowej w polu magnetycznym. Należy przy tym podkreślić, że o ile kwaziklasyczne zachowanie układu dla silnych domieszkowań odtwarza wyniki otrzymane wcześniej dla prostokątnego paska grafenowego w polu magnetycznym [Pra07], o tyle periodyczne oscylacje magnetoprzewodnictwa w punkcie Diraca (jak również na każdym z poziomów Landaua) są specyficzne dla dysku Corbino, a transport elektronów przez taki układ nie był wcześniej rozważany w literaturze dotyczącej grafenu.

W pracy [A.9] badano także wpływ odbicia Andreeva [Akh07] na zachowanie układu w sytuacji, gdy jedna z elektrod jest nadprzewodząca. Okazuje się, że takie odbicie znacznie wzmacnia oscylacje przewodnictwa w obszarze tunelowym, nie zmienia jednak ich okresu. Przykładowo, amplituda oscylacji na poziomie 10% średniego przewodnictwa osiągana jest już dla  $R_2/R_1 \ge 2.2$ . Zachowanie układu w obszarze balistycznym nie zmienia się natomiast w sposób zauważalny. Ponieważ pola krytyczne nadprzewodników I rodzaju są niewielkie, zaś uzyskanie połączenia nadprzewodnika II rodzaju z grafenem w praktyce może być trudne przypuszczam, że wpływ odbicia Andreeva na przewodnictwo układu rzeczywistego polegał będzie na znacznym pogłębieniu minimum przewodnictwa dla B = 0, w porównaniu z minimami dla wyższych pól, w przypadku których elektroda pierwotnie nadprzewodząca przejdzie już do stanu normalnego.

W końcowej części pracy [A.9] wyrażam nadzieję, że przedstawiona analiza teoretyczna spotka się z zainteresowaniem zespołów doświadczalnych, gdyż opisane oscylacje przewodnictwa dysku Corbino w grafenie wydają się być nowej klasy zjawiskiem w dziedzinie transportu elektronów w układach mezoskopowych. Nie widać przy tym zasadniczych przeszkód, które mogłyby utrudnić realizację doświadczalną tego zjawiska. Przykładowo, dla dysku grafenowego o średnicy 100 nm oscylacje powinny być widoczne w polach około 1 T przy temperaturach rzędu 0.1 K, czyli w warunkach osiągalnych w wielu współczesnych laboratoriach, w tym co najmniej trzech w naszym kraju. Dla przykładu, niemal identycznych warunków zewnętrznych wymaga do działania grafenowy interferoment typu Aharonowa-Bohma, a urządzenia takie zbudowano niezależnie już w dwóch ośrodkach [Rus08, Sta09], pomimo znacznych trudności związanych z precyzyjnym wycięciem cienkiego pierścienia grafenowego tak, aby każdy fragment obwodu wykazywał wysokie przewodnictwo elektryczne. W przypadku dysku Corbino, trudności takie nie powinny wystąpić.

## II. PRACE BADAWCZE NIEZWIĄZANE Z ROZPRAWĄ HABILITACYJNĄ

#### A. Krótkie omówienie rozprawy doktorskiej

W okresie studiów doktoranckich (2000–2003) przygotowałem, pod kierunkiem promotora Prof. dr hab. Józefa Spałka, rozprawę doktorską zatytułowaną: *Physical properties and quantum phase transitions in strongly correlated electron systems from a combined exact diagonalization—ab initio approach* [Dok03]. Praca stanowiła punkt wyjścia do większości badań prowadzonych w pierwszych latach po jej obronie (2003–2007). Z tego powodu, przedstawię teraz pokrótce materiał zawarty w pracy doktorskiej, ze szczególnym uwzględnieniem wyników niepublikowanych przed jej obroną.

Przedmiotem pracy były zastosowania nowej metody opisu silnie skorelowanych fermionów (EDABI) do badań układów nanoskopowych, takich jak łańcuchy atomowe, klastry i drabinki, zawierające  $N \leq 16$  atomów. Metoda EDABI, łącząca ścisłą diagonalizację hamiltonianu w przestrzeni Focka z optymalizacją jednocząstkowych funkcji falowych w jednym schemacie wariacyjnym, jest rozwijana w naszym zespole od 2000 roku [Spa00]. Pierwsze zastosowania metody dotyczyły m. in. lokalizacji elektronów w układach jednowymiarowych bliskich punktu przejścia metal–izolator [Spa01], dimeryzacji i drgań zerowych w takich układach [Ryc02], poźniej badano także stany elektronowe prostych molekuł i atomów [Gor05, Ryc06a]. W pracy doktorskiej, analiza układów jednowymiarowych została istotnie rozszerzona poprzez dyskusję dynamicznych funkcji korelacji oraz systematyczne rozwiązanie problemu wyboru warunków brzegowych, istotnego dla małych układów. Ponadto, przedstawiono oryginalne wyniki dotyczące energii stanu podstawowego trójwymiarowego klastra H<sub>4</sub> i analizę stabilności tego układu, wraz z dyskusją możliwych konsekwencji dla metalizacji wodoru w trzech wymiarach.

Pracę rozpoczyna szczegółowe omówienie podstaw formalnych metody EDABI, jej znaczenie dla ścisłej analizy układów skorelowanych, oraz związku z metodą *multiconfiguration– interaction* (MCI) stosowaną w chemii kwantowej. Zasadniczą część pracy stanowi analiza stanu podstawowego, wzbudzeń jednocząstkowych i własności transportowych łańcuchów nanoskopowych zawierających  $N \leq 16$  atomów. Przedyskutowano również zagadnienie wyboru optymalnych warunków brzegowych (minimalizujących energię stanu podstawowego), oraz jego związek z pojęciem fikcyjnego strumienia magnetycznego, wprowadzonym przez Kohna [Koh64]. Ponadto, analizowano stabilność klastra H<sub>4</sub> dla równoległej i prostopadłej orientacji osi długich molekuł. Przedyskutowano także prawdopodobne konsekwencje tych wyników dla przejścia metal–izolator w trójwymiarowym krysztale wodoru, które jest związane z dysocjacją molekuł pod wysokim ciśnieniem. Pracę zamyka analiza statycznych i dynamicznych funkcji korelacji dla drabinek wodorowych, wraz z dyskusją tzw. *katastrofy dielektrycznej*, która zachodzi w układach podlegających gwałtownej transformacji od izolatora pasmowego do izolatora typu Motta–Hubbarda.

Podsumowując, główne tezy rozprawy doktorskiej to:

- współistnienie cech metalu i izolatora w połówkowo wypełnionym nanołańcuchu i *stop-niowa* dominacja cech izolatora Motta–Hubbarda ze wzrostem stałej sieci;
- transformacja układu od nanometalu (z maksymalną przewodnością dopuszalną w ramach mechaniki kwantowej) do nanoizolatora z uporządkowaniem ładunkowym dla wypełnienia 1/4;
- stabilność klastra H<sub>4</sub> i drabinek względem rozpadu na cząsteczki H<sub>4</sub>, oraz dysocjacja molekuł dla wysokich gęstości;
- obecność katastrofy dielektrycznej w drabince płaskiej podlegającej transformacji od uporządkowania charakterystycznego dla izolatora pasmowego (zamknięte powłoki molekularne) do izolatora typu Motta–Hubbarda.

Oryginalną cechą badań przedstawionych w pracy była analiza własności układów silnie skorelowanych jako funkcji ich parametrów geometrycznych (np. stałej sieci dla łańcucha), zamiast jako funkcji abstrakcyjnych parametrów modelowych. Takie podejście, możliwe w ramach metody EDABI, zasadniczo upraszcza analizę, zwłaszcza dla układów z oddziaływaniami dalekiego zasięgu.

Wyniki opisane w rozprawie doktorskiej były podstawą prac [Ryc04, Ryc05], a także części pracy [Gor05] i części artykułu przeglądowego [Spa07].

## B. Lokalizacja Motta i przewodność układów nanoskopowych (2003–2005)

Jako nowy wynik otrzymany po obronie pracy doktorskiej, w pierwszej kolejności wymienić należy zastosowanie kryterium lokalizacji wielocząstkowej funkcji falowej, zaproponowanego przez Restę i Sorellę [Res99] do opisu skorelowanych elektronów w układzie nanoskopowym. Kryterium to, razem z przeprowadzoną wcześniej analizą rozkładu elektronów w przestrzeni pędów (w oparciu o skalowanie typu Tomonagi–Luttingera) i zachowania wagi Drudego ze wzrostem liczby atomów N w łańcuchu, daje spójny opis nietypowego zjawiska, które proponujemy nazwać *częściową lokalizacją* elektronów w nanoukładach [Ryc04]. W dużym skrócie, układ taki wykazuje pewne cechy izolatora typu Motta–Hubbarda (przerwa energety-czna i częściowe uporządkowanie spinowe pomimo braku spontanicznego złamania symetrii

w jednym wymiarze) i pewne cechy jednowymiarowego metalu (a właściwie cieczy kwantowej typu Tomonagi–Luttingera), jak niezerowa waga Drudego czy charakterystyczny przebieg funkcji rozkładu elektronów w przestrzeni pędów. Wspomniane cechy zawsze *współistnieją* (dla skończonego N), jednak od parametrów układu (w tym wypadku stałej sieci R) zależy, które z nich dominują. Na tej podstawie można stwierdzić, że stan izolatora Motta realizuje się *stopniowo* ze wzrostem stałej sieci. Analizę, przedstawioną w pracy [Ryc04] uzupełnia obliczenie przerwy spinowej, której zanik ze wzrostem N jasno pokazuje, że układ jest izolatorem Motta w granicy  $N \rightarrow \infty$ , oraz zrenormalizowana relacja dyspersji dla elektronów i dziur, z której wynika, że przybliżenie Hartree–Focka daje wprawdzie poprawny opis kształtu podpasm Hubbarda, jednak wartość przerwy ładunkowej jest zawyżona. Na osobną uwagę zasługuje dyskusja wyboru optymalnych warunków brzegowych przez układ jako *fazy Berry'ego*, przedstawiona pokrótce w pracy [Gor05].

Niemniej ważne, z punktu widzenia badań fundamentalnych układów nanoskopowych, jest rozszerzenie dotychczasowej dyskusji na łańcuchy z nieparzystą liczbą atomów N, przedstawione w pracy [Ryc06b]. Nie jest zaskoczeniem, że zmiana parzystości N powoduje istotne modyfikacje struktury elektronowej małego układu. Zjawisko to, nazywane *efektem parzystości*, jest związane z pojawieniem się dodatkowego stanu w punkcie Fermiego oraz frustracji spinowej dla N nieparzystego. Szczegóły mechanizmu okazują się jednak bardzo ciekawe. Rozkład elektronów w przestrzeni pędów, który dla parzystych N dał się przybliżać uniwersalną funkcją (typu Tomonagi–Luttingera), dla N nieparzystych wykazuje silną, systematyczną zależność od N. Odwrotnie zachowuje się przerwa energetyczna, która dla parzystych N silnie malała ze wzrostem rozmiaru układu, dla nieparzystych staje się praktycznie niezależna od N. Zupełnie, jakby obecność dodatkowego elektronu w punkcie Fermiego redukowała wpływ kwantowania geometrycznego pędów na strukturę poziomów energetycznych (przynajmniej niskowzbudzonych), zaś wzmacniała jego wpływ na rozkład statystyczny cząstek. Co ciekawe, wielkości całkowe, jak waga Drudego, praktycznie nie odczuwają efektów zmiany parzystości N.

W pracy [Ryc06a] analizujemy przewodność molekuły H<sub>2</sub>, traktowanej jako podwójna kropka kwantowa podłączona do elektrod zewnętrznych wypełnionych gazem elektronowym. Pokazano, że metoda wariacyjna obliczania przewodnictwa, opracowana przez zespół z Uniwersytetu w Lublanie [Rej03], daje się stosunkowo łatwo połączyć z optymalizacją (typu *ab initio*) orbitali jednocząstkowych. Zasadniczym wynikiem fizycznym pracy jest złamanie symetrii cząstka–dziura na skutek silnej renormalizacji orbitali w obecności oddziaływania: pasmo przewodnictwa, odpowiadające jonowi dodatniemu H<sub>2</sub><sup>+</sup>, jest blisko trzykrotnie szersze niż pasmo odpowiadajace jonowi H<sub>2</sub><sup>-</sup>. Prace w tym kierunku, dotyczące np. stabilnego klastra H<sub>3</sub><sup>+</sup> i podobnych układów, są kontynuowane w naszym zespole.

Podsumowanie prac badawczych opisanych w tej części zawarte jest artykule przeglądowym poświęconym metodzie EDABI [Spa07].

#### C. Stany splątane w układach skorelowanych (2006–2007)

W ostatnich latach pojawiła się interesująca koncepcja zastosowania pojęć z dziedziny kwantowej teorii informacji (jak *entropia von Neumanna*, czy inne *miary splątania*) do opisu kwantowych przejść fazowych [Ost02]. Interesowało mnie w szczególności, czy takie podejście można zastosować do skorelowanej kropki kwantowej w obszarze rezonansu Kondo? Ten ciekawy układ nie wykazuje co prawda przejścia fazowego, lecz zachowanie typu *crossover*, o przejściu fazowym można mówić jedynie dla nieskończonej stałej sprzężenia. Na szczególną uwagą zasługuje związek przewodnictwa elektrycznego układu z występowaniem splątania kwantowego pomiędzy elektronem uwięzionym w kropce kwantowej a elektronami swobodnymi w elektrodach. Okazuje się, że monotoniczna zależność pomiędzy tymi wielkościami występuje poniżej pewnej skończonej wartości oddziaływania, powyżej której splątanie może nawet całkowicie znikać w obszarze rezonansu Kondo, gdzie przewodnictwo układu zbliża się do maksymalnej wartości  $G = 2e^2/h$ . Użytecznym wynikiem analitycznym okazało się wyrażenie ilościowej miary splątania kwantowego wprowadzonej przez Woottersa [Woo98], poprzez wartości oczekiwane operatorów jedno- i dwucząstkowych zdefiniowanych na sieci. Przykładowo, dla elekronów na węzłach *i* oraz *j*, takie wyrażenie w najprostszej wersji (splątanie dla ładunkowych stopni swobody) przyjmuje postać [Ryc06c]

$$C_{i,j} = 2 \max\left\{ 0, \left| \langle c_i^{\dagger} c_j \rangle \right| - \sqrt{\langle n_i n_j \rangle \left( 1 - \langle n_i \rangle - \langle n_j \rangle + \langle n_i n_j \rangle \right)} \right\},\tag{13}$$

gdzie  $c_i^{\dagger}(c_i)$  są operatorami kreacji (anihilacji),  $n_i \equiv c_i^{\dagger}c_i$ , a spin elektronu pominięto dla uproszczenia zapisu. Wartości oczekiwane występujące we wzorze (13) obliczane są numerycznie, dla stanu podstawowego układu oddziałujących elektronów, w ramach metody wariacyjnej Rejeca–Ramšaka [Rej03].

Praca zawierająca opisane wyżej wyniki [Ryc06c] była punktem odniesienia dla innych badań relacji pomiędzy splątaniem kwantowym a przewodnictwem elektrycznym nanoukładów [Ram06, Bus07, Ram08]. Udało się także połączyć formalizm opisu splątania kwantowego w układzie oddziałujących elektronów z metodą EDABI [Ryc08b]. W szczególności wykazano, że splątanie ładunkowych stopni swobody (13) dla elektronów walencyjnych atomów wodoru jest wielkością umożliwiającą jednoznaczną klasyfikację stanów kwantowych cząsteczki H<sub>2</sub> w układzie otwartym (tj. podłączonej do elektrod metalicznych).

### **III. PODSUMOWANIE**

Za najważniejsze osiągnięcia poznawcze prac [A.1–A.9] wchodzących w skład przedstawionej rozprawy, uważam:

- Propozycję i analizę teoretyczną mechanizmu obsadzania wybranego punktu Diraca w strukturze pasmowej grafenu przez nośniki ładunku elektrycznego [A.1–A.3] oraz dyskusję związków takiego mechanizmu z efektem Aharonowa-Bohma pierścieniach nanoskopowych [A.4–A.5].
- Opracowanie prostych modeli nieporządku w nanoukładach grafenowych i analizę numeryczną konsekwencji nieporządku dla wielkości mierzalnych, takich jak fluktuacje przewodnictwa i rozkłady statystyczne poziomów energetycznych [A.6–A.7].
- Zastosowanie metody odwzorowań konforemnych do obliczania przewodnictwa i szumu śrutowego w układach grafenowych o różnych kształtach, jak również określenie relacji

asymptotycznej pomiędzy tymi wielkościami w obszarze przewodnictwa tunelowego, której postać zależy wyłącznie od klasy symetrii badanego układu [A.8].

• Identyfikację nowego zjawiska kwantowego związanego z transportem elektronów Diraca w grafenowym dysku Corbino, które polega na periodycznych oscylacjach przewodnictwa układu w zewnętrznym polu magnetycznym [A.9].

Na zakończenie, wymienię dwa wyniki spośród otrzymanych po obronie pracy doktorskiej lecz niewchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej, które uważam za najważniejsze:

- Opis lokalizacji Motta i przewodnictwa elektrycznego prostych molekuł i drutów kwantowych w ramach metody EDABI połączonej z wariacyjną metodą obliczania przewodnictwa otwartych układów z silnymi korelacjami elektronowymi [Spa07].
- Zastosowanie ilościowych miar splątania kwantowego do opisu kropki kwantowej w pobliżu rezonansu Kondo [Ryc06c] oraz identyfikacji stanów kwantowych cząsteczki H<sub>2</sub> modelowanej jako podwójna kropka kwantowa z korelacjami elektronowymi i renormalizacją bazy jednocząstkowej [Ryc08b].

### LITERATURA CYTOWANA

- [A.1] A. Rycerz, J. Tworzydło, and C.W.J. Beenakker, Nature Phys. 3, 172 (2007).
- [A.2] A.R. Akhmerov, J.H. Bardarson, A. Rycerz, and C.W.J. Beenakker, Phys. Rev. B 77, 205416 (2008).
- [A.3] A. Rycerz, phys. stat. sol. (a) **205**, 1281 (2008).
- [A.4] P. Recher, B. Trauzettel, A. Rycerz, Ya.M. Blanter, C.W.J. Beenakker, and A.F. Morpurgo, Phys. Rev. B **76**, 235404 (2007).
- [A.5] A. Rycerz, Acta Phys. Polon. A **115**, 322 (2009).
- [A.6] A. Rycerz, J. Tworzydło, and C.W.J. Beenakker, Eur. Phys. Lett. 79, 57003 (2007).
- [A.7] J. Wurm, A. Rycerz, I. Adagideli, M. Wimmer, K. Richter, and H.U. Baranger, Phys. Rev. Lett. 102, 056806 (2009).
- [A.8] A. Rycerz, P. Recher, and M. Wimmer, Phys. Rev. B 80, 125417 (2009).
- [A.9] A. Rycerz, *Magnetoconductance of the Corbino disk in graphene*, arXiv:0909. 3018, przesłane do Phys. Rev. B.
- [Nov04] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, and A.A. Firsov, Science **306**, 666 (2004).

- [Cas09] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, and A.K. Geim, Rev. Mod. Phys. 81, 109 (2009).
- [Gei09] A.K. Geim, Science **324**, 1530 (2009).
- [Ber04] C. Berger, Z. Song, T. Li, X. Li, A.Y. Ogbazghi, R. Feng, Z. Dai, A.N. Marchenkov, E.H. Conrad, P.N. First, and W.A. de Heer, J. Phys. Chem. B 108, 19912 (2004).
- [Nov05] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos, and A.A. Firsov Y. Zhang, Nature 438, 197 (2005).
- [Wal47] P.R. Wallace, Phys. Rev. 71, 622 (1947).
- [Clu57] J.W. McClure, Phys. Rev. 108, 612 (1957).
- [Slo58] J.C. Slonczewski and P.R. Weiss, Phys. Rev. 109, 272 (1957).
- [Sem84] G.W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. 53, 2449 (1984).
- [Vin84] D.P. DiVincenzo, E.J. Mele, Phys. Rev. Lett. 29, 1685 (1984).
- [Bee08] C.W.J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. 80, 1337 (2008).
- [Kat06] M.I. Katsnelson, Eur. Phys. J. B 51, 157 (2006).
- [Two06] J. Tworzydło, B. Trauzettel, M. Titov, A. Rycerz, and C.W.J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **96**, 246802 (2006).
- [Nom07] K. Nomura and A.H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. 98, 076602 (2007).
- [Tit07] M. Titov, Eur. Phys. Lett. 79, 17004 (2007);
- [Mia07] F. Miao, S. Wijeratne, Y. Zhang, U.C. Coscun, W. Bao, and C.N. Lau, Science **317**, 1530 (2007).
- [Nai08] R.R. Nair, P. Blake, A.N. Grigorenko, K.S. Novoselov, T.J. Booth, T. Stauber, N.M.R. Peres, and A.K. Geim, Science 320, 1308 (2008).
- [Wol01] S.A. Wolf, Science **294**, 1488 (2001).
- [Cer05] V. Cerletti, W.A. Coish, O. Gywat, and D. Loss, Nanotechnology 16, R27 (2005).
- [And91] T. Ando, Phys. Rev. B 44, 8017 (1991).
- [Fuj96] M. Fujita, K. Wakabayashi, K. Nakada, and K. Kusakabe, J. Phys. Soc. Japan 65, 1920 (1996).
- [Nak96] K. Nakada, M. Fujita, G. Dresselhaus, and M.S. Dresselhaus, Phys. Rev. B 54, 17954 (1996).
- [Akh08b] A.R. Akhmerov and C.W.J. Beenakker, Phys. Rev. B 77, 085423 (2008).

- [Tra07] B. Trauzettel, D.V. Bulaev, D. Loss, and G. Burkard, Nature Physics 3, 192 (2007).
- [Ric02] K. Richter and M. Sieber, Phys. Rev. Lett. 89, 206801 (2002).
- [Ber87] M.V. Berry and R.J. Mondragon, Proc. R. Soc. 412, 53 (1987).
- [Meh04] M. Lal Mehta, Random Matrices, (Elsevier, New York, 2004).
- [Suz02] H. Suzuura and T. Ando, Phys. Rev. Lett. 89, 266603 (2002).
- [Can06] E. McCann, K. Kechedzhi, V.I. Fal'ko, H. Suzuura, T. Ando, and B.L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. 97, 146805 (2006).
- [Pon08] L.A. Ponomarenko, F. Schedin, M.I. Katsnelson, R. Yang, E.W. Hill, K.S. Novoselov, and A.K. Geim, Science 320, 356 (2008).
- [Sta08] C. Stampfer, E. Schurtenberger, F. Molitor, J. Guettinger, T. Ihn, and K. Ensslin, Nano Lett. 8, 2378 (2008).
- [Bee97] C.W.J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. 69, 731 (1997).
- [Lib09] F. Libisch, C. Stampfer, and J. Burgdörfer, Phys. Rev. B, 79, 115423 (2009).
- [Son06] Y.-W. Son, M.L. Cohen, and S.G Louie, Phys. Rev. Lett. 97, 216803 (2006).
- [Wim08] M. Wimmer, I. Adagideli, S. Berber, D. Tomanek, and K. Richter, Phys. Rev. Lett. **100**, 177207 (2008).
- [Bla00] Ya.M. Blanter and M. Büttiker, Phys. Rep. 336, 1 (2000).
- [Bee03] C.W.J. Beenakker and C. Schönenberger, Physics Today 56 (5), 37 (2003).
- [Bee92] C.W.J. Beenakker and M. Büttiker, Phys. Rev. B 46, 1889 (1992).
- [Nag92] K.E. Nagaev, Phys. Lett. A 169, 103 (1992).
- [Car08] L. DiCarlo, J.R. Williams, Yiming Zhang, D.T. McClure, and C.M. Marcus, Phys. Rev. Lett. 100, 156801 (2008).
- [Dan08] R. Danneau, F. Wu, M.F. Craciun, S. Russo, M.Y. Tomi, J. Salmilehto, A.F. Morpurgo, and P.J. Hakonen, Phys. Rev. Lett. 100, 196802 (2008).
- [Sch07] H. Schomerus, Phys. Rev. B 76, 045433 (2007).
- [Pra07] E. Prada, P. San-Jose, B. Wunsch, and F. Guinea, Phys. Rev. B 75, 113407 (2007).
- [Akh07] A.R. Akhmerov and C.W.J. Beenakker, Phys. Rev. B 75, 045426 (2007).
- [Rus08] S. Russo, J.B. Oostinga, D. Wehenkel, H.B. Heersche, S.S. Sobhani, L.M.K. Vandersypen, and A.F. Morpurgo, Phys. Rev. B 77, 085413 (2008).

- [Sta09] C. Stampfer, E. Schurtenberger, F. Molitor, J. Guettinger, T. Ihn, and K. Ensslin, Int. J. Mod. Phys. 23, 2647 (2009).
- [Dok03] Pełny tekst pracy, w języku angielskim, jest dotępny pod adresem http://th-www.if.uj.edu.pl/ztms/.
- [Spa00] J. Spałek, R. Podsiadły, W. Wójcik, and A. Rycerz, Phys. Rev. B **61**, 15676–87 (2000).
- [Spa01] J. Spałek and A. Rycerz, Phys. Rev. B 64, 161105(R) (2001).
- [Ryc02] A. Rycerz and J. Spałek, Phys. Rev. B 65, 035110 (2002).
- [Gor05] E.M. Görlich, A. Rycerz, and J. Spałek, phys. stat. sol. (b), 242, 234 (2005).
- [Ryc06a] A. Rycerz and J. Spałek, Physica B 378-380, 935 (2006).
- [Koh64] W. Kohn, Phys. Rev. 133, A171 (1964).
- [Ryc04] A. Rycerz and J. Spałek, Eur. Phys. J. B 40, 153 (2004).
- [Ryc05] A. Rycerz and J. Spałek, Physica B **359–361**, 1448 (2005).
- [Spa07] J. Spalek, E.M. Gorlich, A. Rycerz, R. Zahorbenski, J. Phys. Condens. Matter 19, 255212 (2007).
- [Res99] R. Resta and S. Sorella, Phys. Rev. Lett. 82, 370 (1999).
- [Ryc06b] A. Rycerz, J. Spałek, phys. stat. sol. (b) 243, 183 (2006).
- [Rej03] T. Rejec, A. Ramšak, Phys. Rev. B 68, 035342 (2003).
- [Ost02] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci G, and R. Fazio, Nature 416, 608 (2002).
- [Woo98] W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998).
- [Ryc06c] A. Rycerz, Eur. Phys. J. B. 52 291 (2006).
- [Ram06] A. Ramšak, J. Mravlje, R. Žitko, and J. Bonča, Phys. Rev. B 74, 241305(R) (2006).
- [Bus07] F. Buscemi, P. Bordone, and A. Bertoni, Phys. Rev. B 76, 195317 (2007).
- [Ram08] A. Ramšak and J. Mravlje, Eur. Phys. J. B. 61 419 (2008).
- [Ryc08b] A. Rycerz, Physica B 403, 1534 (2008).